

Performa Skema Orde Dua dan Orde Empat Finite Difference Method dalam Simulasi Vortex Shedding

Chindy Eka Putri^{1*}, Romie Oktovianus Bura², Pranowo³, Lalu Aan Sasaka Akbar⁴

^{1,2,4}Program Studi Teknologi Daya Gerak, Fakultas Teknik dan Teknologi Pertahanan, Universitas Pertahanan Republik Indonesia

³Program Studi Informatika, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Atma Jaya Yogyakarta

Email Corresponding Author : chindy.putri@tp.idu.ac.id

ABSTRAK

Pemodelan fenomena *vortex shedding* memerlukan skema diskritisasi yang mampu menangkap dinamika aliran secara akurat sekaligus efisien secara komputasi. *Finite Difference Method* (FDM) dengan skema orde dua dan orde empat merupakan dua pendekatan yang umum digunakan. Namun, perbandingan performa komprehensif keduanya masih terbatas dalam literatur. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan performa skema FDM orde dua dan orde empat dalam simulasi *vortex shedding* berdasarkan akurasi terhadap parameter fisis (bilangan Strouhal St , koefisien drag C_D , koefisien lift C_L) serta *computational cost* yang meliputi kebutuhan resolusi grid dan waktu komputasi. Metode yang digunakan adalah studi literatur komparatif dengan menganalisis data dari penelitian terdahulu yang relevan yang mencakup perbandingan galat relatif vortisitas, nilai St , C_D , C_L , serta informasi *computational cost*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada ukuran grid yang sama, skema orde empat menghasilkan galat relatif yang lebih kecil dibandingkan skema orde dua. Pada $Re = 200$, skema orde empat menghasilkan $St = 0.197$ dan $C_D = 1.34 \pm 0.044$, sangat dekat dengan data eksperimen. Selain aspek akurasi, ditinjau pula *computational cost* pada masing-masing skema dan ditemukan bahwa skema orde empat membutuhkan waktu komputasi 5–20% lebih lama per iterasi. Implikasi penelitian ini adalah pemilihan skema numerik perlu mempertimbangkan kompromi antara akurasi dan *computational cost*, dengan skema orde empat direkomendasikan untuk simulasi yang memerlukan presisi tinggi pada $Re \geq 200$. Penelitian lanjutan disarankan untuk memperluas rentang bilangan Reynolds hingga regime turbulen dan mengembangkan skema adaptif berbasis gradien lokal.

Kata kunci: *Finite Difference Method*; orde dua; orde empat; *vortex shedding*; akurasi; *computational cost*

PENDAHULUAN

Vortex shedding didefinisikan sebagai fluktuasi aliran ketika fluida mengalir melewati suatu benda tumpul pada kecepatan tertentu yang bergantung pada ukuran dan bentuk benda tersebut (Sikien et al., 2018). Fenomena tersebut berdampak terhadap ketahanan struktur dan performa aerodinamika, khususnya gaya angkat dan gaya hambat. Karakteristik fluktuatif dan sifat non-linear dari pola aliran yang dihasilkan melahirkan tantangan tersendiri dalam pemodelan matematisnya.

Secara fundamental, fenomena fisik di dunia nyata dapat dikaji melalui *Partial Differential Equations* (PDE) baik secara analitik maupun numerik. Namun, solusi analitik umumnya hanya tersedia untuk kasus sederhana dengan geometri, kondisi batas, dan asumsi fisik tertentu. Oleh sebab itu, dikembangkan metode numerik sebagai pendekatan yang lebih mumpuni untuk menyelesaikan masalah yang lebih kompleks dan tidak beraturan (El-metwaly & Kamal, 2024), seperti halnya dinamika aliran pada *vortex shedding*.

Metode numerik memiliki keunggulan dalam memberikan informasi terperinci (Zhang et al., 2023). Salah satu metode yang seringkali digunakan yaitu *Finite Difference Method* (FDM) karena kemudahan implementasinya pada grid terstruktur (Whalen, 2025 ; Luo, 2022). FDM bergantung pada pembagian domain spasial PDE menjadi grid seragam. Pada metode ini, PDE diaproksimasi menjadi persamaan selisih menggunakan deret Taylor (El-metwaly & Kamal, 2024).

Dua skema diskritisasi FDM yang sering dibandingkan yaitu orde dua dan orde empat. Skema orde dua memiliki karakteristik sederhana dan pada umumnya stabil, sedangkan skema orde empat dikembangkan untuk meningkatkan resolusi dan mengurangi kesalahan numerik (Z. J. Å. Wang, 2007). Perbedaan karakteristik tersebut menjadi dasar evaluasi terhadap keandalan tiap skema dalam merepresentasikan fenomena fisik secara presisi. Analisis akurasi pada aliran fluida memiliki peran yang sangat besar pada berbagai aplikasi teknik (Plogmann et al., 2024). Meski demikian, optimalisasi sumber daya komputasi terhadap capaian yang dituju harus dipertimbangkan agar simulasi tetap berjalan efektif. Oleh karena itu, artikel ini bertujuan untuk meninjau dan mensintesis performa FDM orde dua dan orde empat dalam memodelkan fenomena *vortex shedding* aspek akurasi dan *computational cost*.

Kebaharuan artikel ini terletak pada upaya mensintesis temuan dari berbagai penelitian sebelumnya yang masing-masing memiliki fokus spesifik. Anderson & Reider (1996) mengkaji formulasi *stream function-vorticity* untuk skema orde dua dan orde empat, tetapi tidak membahas parameter gaya aerodinamika seperti bilangan Strouhal St , koefisien drag C_D , dan koefisien lift C_L . Sejumlah penelitian tidak secara eksplisit mengelompokkan hasil simulasi berdasarkan orde akurasi, sehingga perbandingan langsung antar skema menjadi tidak mudah dilakukan. C. Liu et al., (1998), Calhoun (2002) dan (Park et al., 1998) menerapkan metode skema orde dua untuk memprediksi nilai St , C_D , dan C_L , sedangkan Linnick & Fasel (2005) menerapkan metode skema orde empat. Stålberg et al., (2006) telah menyajikan ketiga parameter fisis tersebut untuk skema orde dua dan orde empat, tetapi belum mencakup rentang bilangan Reynolds hingga 200. Oleh sebab itu, artikel ini bertujuan untuk menghubungkan secara sistematis antara performa skema orde dua dan orde empat terhadap parameter *stream function-vorticity* ($\psi - \omega$) serta nilai St , C_D , dan C_L dalam satu kerangka tinjauan, yang mana keempat aspek tersebut saling terkait erat dalam simulasi *vortex shedding*.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian/Desain

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan desain komparatif untuk membandingkan performa beberapa skema numerik pada simulasi *vortex shedding*. Metode yang digunakan berupa studi literatur dengan data diperoleh dari jurnal, buku, serta hasil penelitian terdahulu yang relevan.

Populasi dan Sampel

Populasi dalam penelitian ini adalah seluruh literatur ilmiah yang membahas metode numerik berbasis FDM pada simulasi aliran fluida, khususnya fenomena *vortex shedding*.

DOI: <https://doi.org/10.63976/kuantum.v7i1.1401>

Sampel penelitian berupa literatur yang memuat parameter *stream function-vorticity* ($\psi - \omega$), St , C_D , dan C_L serta menyediakan informasi mengenai akurasi metode dan *computational cost* yang digunakan dalam simulasi numerik.

Instrumen

Instrumen penelitian yang digunakan berupa kajian literatur yang digunakan untuk mengidentifikasi dan membandingkan karakteristik masing-masing metode numerik pada literatur yang dianalisis.

Tabel 1 Deskripsi Instrumen

Komponen Instrumen	Deskripsi
Identitas literatur	Penulis dan tahun publikasi
Skema numerik	Skema orde dua dan orde empat
Parameter fisis	Nilai ($\psi - \omega$), St , C_D , dan C_L
<i>Computational Cost</i>	Informasi kebutuhan grid dan waktu komputasi

Prosedur/Pengumpulan Data

Pengumpulan literatur dilakukan melalui penelusuran artikel dengan kata kunci seperti "*finite difference method*", "*second-order scheme*", "*fourth-order scheme*", "*vortex shedding*", "*airfoil*", "*wake flow*", "*Strouhal number*", dan "*flow past cylinder*". Literatur dipilih melalui tiga tahap, yaitu identifikasi awal berdasarkan judul dan abstrak, penyaringan berdasarkan relevansi metode dan parameter kajian, serta ekstraksi temuan utama dari artikel terkait.

Analisis Data

Analisis dilakukan dengan mengulas karakteristik masing-masing metode secara terpisah, kemudian dilanjutkan dengan perbandingan berdasarkan akurasi dan *computational cost*. Akurasi ditinjau dengan membandingkan hasil simulasi pada sumber literatur acuan terhadap data referensi lainnya, baik dari eksperimen maupun metode numerik lain menggunakan parameter St , C_D , dan C_L (Kurtulus, 2016). Evaluasi *cost* dinilai dari kebutuhan resolusi grid dan waktu komputasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

1. Karakteristik Vortex Shedding dalam Simulasi Numerik

Fenomena *vortex shedding* diawali oleh separasi lapisan batas pada permukaan suatu benda tumpul, yang mana aliran tersebut tidak mampu mengikuti kontur permukaan dan membentuk *shear layer* yang tidak stabil (J. Wang & Xiong, 2026). *Shear layer* yang telah terlepas kemudian bergulung membentuk vorteks secara bergantian (*alternating shedding*) di sisi kiri dan kanan objek dan menghasilkan osilasi tekanan periodik (Chen et al., 2025 ; J. Liu et al., 2023). Dinamika *vortex shedding* sangat ditentukan oleh bilangan Reynolds (Re) sebagai

parameter non dimensional yang merepresentasikan rasio antara gaya inersia dan gaya viskos (Kumar et al., 2024).

$$Re = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} D}{\mu_{\infty}} \quad (1)$$

Dengan D diameter, ρ_{∞} densitas, U_{∞} kecepatan, dan μ_{∞} koefisien viskositas.

Seiring bertambahnya Re , aliran mengalami transisi dari *steady* menuju *unsteady*, yang mana vorteks mulai muncul secara periodik setelah melewati Re kritis sekitar 40 hingga 50, dan *wake* yang pada awalnya simetris berubah menjadi osilasi periodik yang kompleks (Chen et al., 2025 ; Jordan & Fromm, 1972). Pada Re yang lebih tinggi, frekuensi *shedding* terus meningkat hingga mencapai nilai asimtotik dari bilangan Strouhal, sementara *wake* berkembang menjadi semakin kompleks dengan munculnya instabilitas tiga dimensi dan transisi menuju turbulen yang mengindikasikan perubahan fundamental dalam struktur aliran (Uralde-guinea et al., 2026).

2. Formulasi Numerik Skema Orde Dua-Orde Empat

Metode finite difference memiliki beberapa pendekatan diskretisasi, seperti *forward difference*, *backward difference*, dan *central difference*. PDE yang mengandung fungsi aliran dan vortisitas ($\psi - \omega$) didiskritisasi menggunakan ekspansi deret Taylor melalui pendekatan *central difference* (Aslan et al., 2018). Fungsi aliran dan vorticity merupakan parameter utama dalam simulasi *vortex shedding*. *Central difference* lebih dominan digunakan karena memiliki akurasi yang lebih tinggi dan error numerik yang lebih kecil.

Aproksimasi turunan pertama dan kedua pada skema eksplisit orde dua *central difference* ditunjukkan pada persamaan (Hoffman & Chiang, 2000 ; Anderson & Reider, 1996):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3)$$

Aproksimasi turunan pertama dan kedua pada skema eksplisit orde empat *central difference* ditunjukkan pada persamaan (Hoffman & Chiang, 2000):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x)^4 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12\Delta x^2} + O(\Delta x)^4 \quad (5)$$

Skema orde dua memiliki galat pemotongan $O(\Delta x^2)$, sementara skema orde empat memberikan galat yang jauh lebih kecil dengan orde $O(\Delta x^4)$.

3. Pengaruh Orde Akurasi terhadap Parameter Fisis Vortex Shedding

Pendekatan *fungsi aliran* dan vortisitas ($\psi - \omega$) digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes pada aliran inkompresibel dua dimensi (Tezduyar et al., 1990). Persamaan Poisson yang menghubungkan ψ dan ω dapat ditulis dalam sistem koordinat kartesian dan polar.

Persamaan Poisson non-dimensi dalam koordinat kartesian:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (6)$$

Persamaan transport vortisitas non-dimensi dalam koordinat kartesian:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

Persamaan Poisson non-dimensi dalam koordinat polar (Anderson & Reider, 1996):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega \quad (8)$$

Persamaan transport vortisitas non-dimensi dalam koordinat polar:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad (9)$$

Anderson & Reider (1996) melakukan studi komparasi skema *central difference* orde dua, orde empat, dan hibrid untuk menghitung solusi persamaan Navier-Stokes aliran inkompresibel di sekitar silinder sirkular dua dimensi. Skema hibrid yang dikembangkan menerapkan akurasi orde kedua dalam perhitungan transpor vortisitas dan akurasi orde keempat dalam penentuan *stream function*.

Tabel 2. Galat Relatif *Stream Function-Vorticity* pada $Re = 1000$

Skema	Ukuran grid	Galat <i>vorticity</i> interior	Galat <i>vorticity</i> pada batas (<i>boundary</i>)	Galat pada <i>stream function</i>
Orde empat	32×128	0.068	0.116	0.015
	64×256	0.0054	0.0093	0.00086
	128×512	0.00048	0.00039	0.00011
Orde dua	32×128	0.244	0.237	0.063
	64×256	0.071	0.071	0.017
	128×512	0.019	0.019	0.0044
Hibrid	32×128	0.204	0.145	0.059
	64×256	0.041	0.025	0.011
	128×512	0.0099	0.0060	0.0028

(Sumber: Anderson & Reider, 1996)

Proses periodik pada *vortex shedding* menghasilkan frekuensi pelepasan vorteks yang dapat memicu getaran dan fluktuasi gaya angkat yang pada struktur (Kumar et al., 2024). Frekuensi vorteks (f) dikuantifikasi dalam satuan bilangan Strouhal.

$$St = \frac{fD}{U_\infty} \quad (10)$$

dengan frekuensi vorteks f , D diameter silinder dan U kecepatan aliran bebas. Bilangan Strouhal mencerminkan keteraturan pola Von Kármán vortex street di belakang silinder (Baranyi & R L Lewis, 2006). Pada saat yang sama, distribusi vortisitas berpengaruh terhadap medan tekanan di sekitar silinder melalui persamaan momentum dan berdampak pada gaya hambat F_D serta gaya angkat F_L (Kostecki, 2011). Gaya hambat F_D bekerja searah aliran (berlawanan arah dengan gerak benda) dan gaya angkat F_L bekerja tegak lurus aliran. Keduanya dinormalisasi menjadi bentuk non dimensional sebagai (Xu et al., 2023 ; Li, 2025):

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (11)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (12)$$

Tabel 3. Perbandingan St , C_D , dan C_L pada aliran *unsteady* yang melintasi silinder ($Re = 100$)

No	Sumber	Metode	St	C_D	C_L
1	Berger and Wille [■]	Eksperimen	0.16–0.17		
2	Roshko [†]	Eksperimen	0.164		
3	Williamson [†]	Eksperimen	0.166		
4	Hammache & Gharib [‡]	Eksperimen	0.156		

5	(C. Liu et al., 1998)	Orde dua (<i>compact</i>)	0.165	1.350 ± 0.012	0.339
6	(Calhoun, 2002)	Orde dua	0.175	1.330 ± 0.014	0.298
7	(Park et al., 1998)	Orde dua (<i>standard</i>)	0.164*	1.33	0.3321
8	(Stålberg et al., 2006)	Orde empat (<i>compact</i>)	0.166*	1.32	0.330
9	(Linnick & Fasel, 2005)	Orde empat (<i>compact</i>)	0.166	1.34 ± 0.009	0.333

Tabel 4. Perbandingan St , C_D , dan C_L pada aliran *unsteady* yang melintasi silinder ($Re = 200$)

No	Sumber	Metode	St	C_D	C_L
1	Berger and Wille [■]	Eksperimen	0.18–0.19		
2	Kovaznay [†]	Eksperimen	0.19		
3	Roshko [†]	Eksperimen	0.19		
4	Williamson [†]	Eksperimen	0.197		
5	(Park et al., 1998)	Orde dua (<i>standard</i>)	0.197*	-	-
6	(C. Liu et al., 1998)	Orde dua (<i>compact</i>)	0.192	1.31 ± 0.049	0.69
7	(Stålberg et al., 2006)	Orde empat (<i>compact</i>)	1.968*	-	-
8	(Linnick & Fasel, 2005)	Orde empat (<i>compact</i>)	0.197	1.34 ± 0.044	0.69

Keterangan Tabel 3 dan 4:

■ dikutip dari (Linnick & Fasel, 2005) ; † dikutip dari (Belov et al., 1995) ; ‡ dikutip dari (C. Liu et al., 1998) ; *nilai estimasi berdasarkan persamaan yang menjadi rujukan perhitungan relasi St dan Re dalam artikel terkait.

4. Computational Cost

Kualitas grid merupakan faktor penentu ketercapaian akurasi simulasi numerik (Ghomizad et al., 2021). FDM dapat menghasilkan solusi numerik yang sangat akurat dalam kondisi grid yang sesuai, terutama untuk bentuk geometris yang sederhana dan masalah aliran (Guan et al., 2024). **Tabel 2** menunjukkan bahwa, semakin halus grid yang diterapkan maka semakin kecil galat relatif yang dihasilkan. Hal tersebut berlaku untuk semua skema yang mencakup skema orde dua, orde empat, dan hibrid. Akurasi solusi numerik tersebut dapat ditingkatkan lebih lanjut dengan menggunakan skema selisih orde tinggi (Guan et al., 2024). Pada orde empat, galat relatif *stream function* kurang dari 1% dicapai dengan grid 64×256, yang ukurannya lebih kecil satu tingkat dibandingkan yang diperlukan untuk metode orde kedua.

Komputasi formulasi orde dua membutuhkan waktu yang lebih singkat dibandingkan formulasi orde empat (Aslan et al., 2018). Hal tersebut selaras dengan penelitian Anderson & Reider (1996), yang mana skema orde 4 membutuhkan waktu komputasi 20% lebih besar dari pada skema orde dua.

Shen et al., (2009) melakukan komparasi tiga skema numerik yang mencakup skema orde dua berbasis *three-point* stencil, skema orde empat oleh De Rango & Zingg, serta skema orde empat yang dikembangkan secara mandiri.

Tabel 5. Langkah iterasi dan CPU time

Skema	Langkah	CPU time (s)	Persentase (%)
Orde dua	218	62.9	100.0
Orde empat (De Rango & Zingg) [■]	218	66.0	104.9
Orde empat	218	70.3	111.1

(Sumber: Shen et al., 2009)

Keterangan Tabel 5:

■ dikutip dari (Shen et al., 2009)

Tabel 5 menyajikan informasi mengenai konvergensi dan penggunaan CPU. Kondisi konvergensi ditetapkan ketika residu maksimum lebih kecil dari 10^{-13} . Ketiga skema tersebut memerlukan 218 langkah untuk mencapai kondisi konvergensi. Perbandingan waktu CPU menunjukkan bahwa skema orde empat oleh De Rango & Zingg membutuhkan 4.9% lebih banyak dibandingkan skema orde dua, sedangkan skema orde empat yang dikembangkan membutuhkan 11.8% lebih banyak dibandingkan skema orde dua.

Pembahasan

Pada simulasi *vortex shedding*, akurasi skema numerik sangat sensitif terhadap gradien vortisitas yang tajam di sekitar *shear layer* dan *near-wake*. Secara fundamental, formulasi FDM orde dua dan orde empat memiliki galat pemotongan masing-masing $O(\Delta x^2)$ dan $O(\Delta x^4)$. Stensil orde tinggi dapat mengurangi galat pembulatan yang mendominasi skema orde rendah (Balakrishna & Schultz, 2021). Pada ukuran grid yang sama, skema orde empat menghasilkan galat relatif yang jauh lebih rendah dibandingkan skema orde dua maupun hibrid, sebagaimana ditunjukkan pada **Tabel 2**. Sebagai contoh, pada grid 64×256 , galat vortisitas interior skema orde dua mencapai 0.071, sementara skema orde empat hanya 0.0054. Temuan ini sepenuhnya mendukung prediksi deret Taylor.

Ketika dikaitkan dengan parameter fisis *vortex shedding*, yaitu bilangan St , C_D , dan C_L , keunggulan skema orde empat terlihat pada bilangan Reynolds yang lebih tinggi. Pada $Re = 100$ (**Tabel 3**), skema orde empat oleh Linnick & Fasel (2005) menghasilkan $St = 0.66$, sama dengan nilai eksperimen Williamson dan Roshko. Skema orde dua juga memberikan nilai St dalam rentang eksperimen (0,164-0,175), namun dengan variasi yang lebih besar. Pada parameter C_D , skema orde empat oleh Linnick & Fasel (2005) menghasilkan nilai 1.34 ± 0.009 , sedangkan skema orde dua C. Liu et al., (1998) mencatat 1.35 ± 0.012 dan Calhoun (2002) 1.33 ± 0.014 . Perbedaan antar skema pada $Re = 100$ relatif kecil. Hal tersebut menunjukkan bahwa pada aliran dengan bilangan Reynolds rendah, disipasi numerik skema orde dua masih dapat ditoleransi. Namun, pada $Re = 200$ (**Tabel 4**), perbedaan menjadi lebih signifikan. Skema orde empat Linnick & Fasel (2005) menghasilkan $St = 0.197$, sama dengan

DOI: <https://doi.org/10.63976/kuantum.v7i1.1401>

nilai eksperimen Williamson. Sementara itu, skema orde dua C. Liu et al., (1998) menghasilkan $St = 0.192$, lebih rendah sekitar 2.5%.

Konsistensi skema orde empat dalam mereproduksi nilai St yang tepat dengan eksperimen pada dua bilangan Reynolds yang berbeda (0.166 pada $Re = 100$ dan 0.197 pada $Re = 200$) menunjukkan bahwa skema ini mampu menangkap dinamika vortex shedding dengan tingkat akurasi tinggi. Temuan ini berkaitan dengan karakteristik disipasi numerik. Skema diskritisasi sering menghasilkan disipasi numerik artifisial yang melebihi viskositas fisik aktual. Skema orde empat dengan disipasi numerik yang jauh lebih kecil, mampu mempertahankan struktur vorteks lebih lama dan menghasilkan frekuensi yang lebih akurat. Disipasi tersebut menyebabkan vorteks kehilangan energi lebih cepat sehingga frekuensi shedding yang terprediksi menjadi lebih rendah.

Selain aspek akurasi, metode numerik juga mempertimbangkan aspek penting lainnya yaitu *computational cost*. Berdasarkan kebutuhan grid, untuk mencapai tingkat akurasi yang sama, skema orde membutuhkan lebih sedikit grid dibandingkan dengan skema orde dua. empat justru terletak pada efisiensi gridnya. Meskipun waktu komputasi untuk skema orde empat sekitar 5-20% lebih lama dibandingkan skema orde dua pada grid yang sama (Anderson & Reider, 1996 ; Shen et al., 2009), kebutuhan jumlah grid yang lebih sedikit jumlah dapat mengompensasi tambahan waktu tersebut.

KESIMPULAN

Skema FDM orde dua memiliki keunggulan dalam kemudahan implementasi dan waktu komputasi yang lebih rendah (sekitar 5-20% lebih cepat daripada orde empat), tetapi disipasi numeriknya yang lebih besar menyebabkan akurasi menurun seiring meningkatnya bilangan Reynolds. Sebaliknya, skema FDM orde empat menghasilkan galat relatif lebih kecil pada ukuran grid yang sama, serta mampu mereproduksi nilai St dan C_D yang mendekati data eksperimen, baik pada $Re = 100$ maupun $Re = 200$. Pada tingkat akurasi yang setara dengan skema orde dua, skema orde empat cukup menerapkan grid yang lebih kasar, sehingga efisiensi komputasinya secara keseluruhan kompetitif meskipun waktu per iterasi sedikit lebih tinggi.

Kontribusi utama sintesis ini adalah menghubungkan secara langsung performa numerik kedua skema dengan parameter fisis St , C_D , dan C_L dalam satu kerangka tinjauan, serta menunjukkan bahwa sensitivitas parameter fisis terhadap disipasi numerik berbeda-beda. Keterbatasan sintesis ini adalah rentang Re yang ditinjau terbatas hingga 200. Penelitian lanjutan direkomendasikan untuk mencakup Re yang lebih tinggi, mengembangkan skema adaptif, serta menganalisis kebutuhan memori dan skalabilitas paralel dari masing-masing skema.

REFERENSI

- Anderson, C. R., & Reider, M. B. (1996). A high order explicit method for the computation of flow about a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, 125(1), 207–224. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0089>
- Aslan, E., İnan, İ., Kandemir, I., & Güven, H. R. (2018). Numerical analysis of flow around

DOI: <https://doi.org/10.63976/kuantum.v7i1.1401>

- bluff bodies with 4th and 2nd order compact formulations. *Sakarya University Journal of Science*, 22(5), 1234–1252.
- Balakrishna, S., & Schultz, W. W. (2021). Finite differences for higher order derivatives of low resolution data. *Mathematics and Computers in Simulation*, 190, 714–722. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.06.011>
- Baranyi, L., & R L Lewis. (2006). Comparison of a grid-based CFD method and vortex dynamics predictions of low Reynolds number cylinder flows. *The Aeronautical Journal*, 110(1103), 63–71. <https://doi.org/10.1017/S0001924000004371>
- Belov, A., Martinelli, L., & Jameson, A. (1995). A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations. *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. <https://doi.org/10.2514/6.1995-49>
- Calhoun, D. (2002). A cartesian grid method for solving the equations in irregular regions. *Journal of Computational Physics*, 176(2), 231–275. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6970>
- Chen, Z., Liu, Y., & Sung, H. J. (2025). Influence of Darcy and Reynolds numbers on flow past a porous circular cylinder. *Physics of Fluids*, 37(8), 083635. <https://doi.org/10.1063/5.0284671>
- El-metwaly, A. R., & Kamal, M. A. (2024). A brief review of numerical methods for solving the boundary value problems of PDE. *Journal of Physics: Conference Series*, 2847(1), 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2847/1/012001>
- Ghomizad, M. B., Kor, H., & Fukagata, K. (2021). A structured adaptive mesh refinement strategy with a sharp interface direct-forcing immersed boundary method for moving boundary problems. *Journal of Fluid Science and Technology*, 16(2), JFST0014. <https://doi.org/10.1299/jfst.2021jfst0014>
- Guan, T., Chen, J., Liu, J., & Xu, C. (2024). A second-order-accuracy finite difference scheme for numerical computation on two-dimensional three-neighboring-node unstructured grids. *Physics of Fluids*, 36(3), 036109. <https://doi.org/10.1063/5.0193667>
- Hoffman, K. A., & Chiang, S. T. (2000). *Computational fluid dynamics volume 1* (Fourth Edition). Engineer Education System.
- Jordan, S. K., & Fromm, J. E. (1972). Oscillatory drag, lift, and torque on a circular cylinder in a uniform flow. *Physics of Fluids*, 15(3), 371–376. <https://doi.org/10.1063/1.1693918>
- Kostecki, S. W. (2011). Numerical analysis of hydrodynamic forces due to flow instability at lift gate. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 11(4), 943–961. [https://doi.org/10.1016/S1644-9665\(12\)60088-0](https://doi.org/10.1016/S1644-9665(12)60088-0)
- Kumar, N., Kumar, S., & Bhumkar, Y. G. (2024). Analysis of non-uniform laminar flow past a circular cylinder on the flow and sound field evolution using direct. *Acta Mechanica*, 235, 29–49. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03735-8>
- Kurtulus, D. F. (2016). On the wake pattern of symmetric airfoils for different incidence angles at $Re = 1000$. *Micro Air Vehicles*, 8(2), 109–139. <https://doi.org/10.1177/1756829316653700>
- Li, S. (2025). Sound emission in a quasi-steady transonic turbulent flow pas a circular cylinder.

DOI: <https://doi.org/10.63976/kuantum.v7i1.1401>

- Physical Review Fluids*, 10(3), 34603. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.10.034603>
- Linnick, M. N., & Fasel, H. F. (2005). A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 204(1), 157–192. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.09.017>
- Liu, C., Zheng, X., & Sung, C. H. (1998). Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 139(1), 35–57. <https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5859>
- Liu, J., Ma, W., Jin, L., Liu, X., & Li, T. (2023). Experimental and numerical investigation on the wake flow and vortex shedding of a rotating circular cylinder. *Physics of Fluids*, 35(7), 074114. <https://doi.org/10.1063/5.0157682>
- Luo, Z. (2022). Computation of two-dimensional Poisson equation using the third-order discrete scheme of finite difference method based on node set vector. *Journal of Physics: Conference Series*, 2381(1), 012039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2381/1/012039>
- Park, J., Kwon, K., & Choi, H. (1998). Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160. *KSME International Journal*, 12(6), 1200–1205. <https://doi.org/10.1007/BF02942594>
- Plogmann, J., Brenner, O., & Jenny, P. (2024). Spectral adjoint-based assimilation of sparse data in unsteady simulations of turbulent flows. *Physics of Fluids*, 36(105130), 1–20. <https://doi.org/10.1063/5.0227328>
- Shen, Y., Zha, G., & Chen, X. (2009). High order conservative differencing for viscous terms and the application to vortex-induced vibration flows. *Journal of Computational Physics*, 228(22), 8283–8300. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.08.004>
- Sikien, E. R., Abdullah, A., Zulkafli, M. F., & Rahim, M. Z. (2018). The effects of vortex shedding on the aerodynamic performance of airfoils. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(24), 9344–9351.
- Stålberg, E., Brüger, A., Lötstedt, P., Johansson, A. V., & Henningson, D. S. (2006). High order accurate solution of flow past a circular cylinder. *Journal of Scientific Computing*, 27(1–3), 431–441. <https://doi.org/10.1007/s10915-005-9043-y>
- Tezduyar, T. E., Liou, J., & Ganjoo, D. K. (1990). Incompressible flow computations based on the vorticity-stream function and velocity-pressure formulations. *Computers & Structures*, 35(4), 445–472. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90069-E](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90069-E)
- Uralde-guinea, X., Parra, Y., Uriarte, I., & Fernández-gámiz, U. (2026). Comparison between cylinder and ellipse at 0 degrees angle of attack for low Reynolds numbers. *Measurement Journal*, 258, 119250. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.119250>
- Wang, J., & Xiong, Y. (2026). The role of flow separation in the forces on a circular cylinder with one or two control rods. *Journal of Physics: Conference Series*, 3170, 012032. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/3170/1/012032>
- Wang, Z. J. Á. (2007). High-order methods for the Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids. *Progress in Aerospace Sciences*, 43(1–3), 1–41. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2007.05.001>
- Whalen, M. (2025). A finite difference approach and its error estimate to the two-dimensional

DOI: <https://doi.org/10.63976/kuantum.v7i1.1401>

Poisson equation for dirichlet boundary conditions. *American Journal of Undergraduate Research*, 22(2), 35–48. <https://doi.org/10.33697/ajur.2025.140>

Xu, D., Liu, J., Wu, Y., & Ji, C. (2023). A high - efficiency discretized immersed boundary method for moving boundaries in incompressible flows. *Scientific Reports*, 13, 1699. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28878-5>

Zhang, H., Jia, L., Fu, S., Xiang, X., & Wang, L. (2023). Vortex shedding analysis of flows past forced-oscillation cylinder with dynamic mode decomposition. *Physics of Fluids*, 35(5), 053618. <https://doi.org/10.1063/5.0153302>