

Operasi Aritmetika Baru Untuk Bilangan *Fuzzy* Oktogonal

Iis Nasfianti^{1*}, Susilawati²

^{1,2}Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau

Email Corresponding Author : iis.nasfianti@lecturer.unri.ac.id

Info Artikel

Article history:

Kirim: 5 April 2025

Terima: 8 Mei 2025

Publikasi Online 1 Juni
2025

Kata-kata kunci:

Bilangan *fuzzy* oktagonal;
Aritmetika;
Operasi perkalian;
Invers Perkalian;
Bentuk parametrik.

ABSTRAK

Penelitian ini membahas bilangan *fuzzy* oktagonal yang memiliki kemampuan representasi lebih fleksibel dibandingkan bilangan *fuzzy* segitiga atau trapesium. Namun, operasi aritmetika standar pada bilangan *fuzzy* oktagonal seringkali menghasilkan hasil yang kurang presisi atau terlalu konservatif. Bahkan dalam beberapa penelitian terdahulu terkait operasi aritmetika pada bilangan *fuzzy* oktagonal, pada operasi Aritmetika tidak memberikan konsep invers sebagai bentuk validitas terhadap operasi perkalian. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan dan memodifikasi operasi aritmetika dasar pada bilangan *fuzzy* oktagonal agar lebih efisien dan aplikatif dalam pemodelan sistem ketidakpastian. Metode yang digunakan dalam penelitian ini meliputi studi literatur mendalam terhadap operasi aritmetika *fuzzy* konvensional, formulasi ulang operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan invers pada bilangan *fuzzy* oktagonal, serta pengujian validitas modifikasi melalui contoh numerik, terutama pada invers. Tidak hanya itu, bilangan *fuzzy* tersebut dapat juga disajikan dalam bentuk parametriknya dan dapat dilakukan juga modifikasi operasi aritmetika pada bilangan *fuzzy* oktagonal bentuk parametrik tersebut. Analisis dilakukan secara matematis untuk menjamin konsistensi logika *fuzzy* dan kestabilan hasil. Hasil operasi terkhusus untuk operasi perkalian dan invers pada penelitian menunjukkan bahwa modifikasi operasi aritmetika menghasilkan hasil yang lebih konsisten serta lebih efisien. Modifikasi ini juga mempermudah penerapan dalam sistem linear *fuzzy* dan model optimisasi berbasis *fuzzy*. Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori bilangan *fuzzy* oktagonal dan aplikasinya dalam pemecahan masalah realistik yang mengandung ketidakpastian. Rekomendasi selanjutnya adalah penerapan modifikasi ini dalam sistem kontrol *fuzzy*, pengambilan keputusan multikriteria, dan pengembangan perangkat lunak simulasi *fuzzy* berbasis oktagonal.

1. PENDAHULUAN

Ketidakpastian dalam data merupakan tantangan utama dalam pengambilan keputusan di berbagai bidang, baik dalam skala nasional maupun internasional. Dalam era perkembangan teknologi digital dan sistem cerdas seperti Internet of Things (IoT), kecerdasan buatan, dan big data, representasi data yang mengandung unsur ketidakpastian menjadi semakin krusial. Menurut laporan United Nations (2022), tantangan global dalam pengolahan data ketidakpastian berdampak pada efektivitas kebijakan publik dan sistem prediksi. Di tingkat nasional, Badan Pusat Statistik (BPS) dan Badan Perencanaan Pembangunan Nasional (Bappenas) juga menggarisbawahi pentingnya pendekatan analitik yang mampu merepresentasikan data tidak pasti secara matematis untuk mendukung perencanaan berbasis bukti. Salah satu pendekatan matematis yang banyak digunakan dalam merepresentasikan

ketidakpastian adalah teori bilangan *fuzzy*, yang telah berkembang dari bentuk dasar seperti *fuzzy* segitiga dan trapesium menuju bentuk *fuzzy* oktagonal untuk mencapai representasi yang lebih fleksibel dan mendekati kenyataan.

Menanggapi urgensi tersebut, peneliti memandang bahwa bilangan *fuzzy* oktagonal memiliki potensi yang tinggi untuk digunakan dalam pemodelan data ketidakpastian secara lebih presisi, terutama karena bentuk oktagonal memungkinkan penggambaran fungsi keanggotaan dengan lebih detail. Akan tetapi, dalam berbagai penelitian sebelumnya, operasi aritmetika pada bilangan *fuzzy* oktagonal masih menyisakan sejumlah kelemahan, antara lain hasil yang terlalu konservatif serta ketiadaan definisi formal mengenai invers pada operasi perkalian. Penelitian oleh Gemawati (2018) menunjukkan bahwa sistem linear *fuzzy* oktagonal dapat diselesaikan dengan pendekatan dekomposisi QR, namun tidak mengkaji aspek validitas operasi perkalian dan invers secara eksplisit. Demikian pula, studi oleh Dubois dan Prade (1980) sebagai pelopor teori *fuzzy* juga belum menjangkau representasi *fuzzy* bentuk oktagonal secara spesifik. Celah inilah yang menjadi alasan utama perlunya pengembangan lebih lanjut dalam bentuk modifikasi aritmetika bilangan *fuzzy* oktagonal, agar dapat digunakan secara lebih tepat dalam konteks praktis maupun teoritis.

Kebaruan dalam penelitian ini terletak pada upaya modifikasi operasi aritmetika *fuzzy* oktagonal, khususnya pada operasi perkalian dan invers, yang sebelumnya tidak dikaji secara tuntas dalam literatur. Dengan menggunakan pendekatan matematis berbasis teori *fuzzy* Zadeh (1965) dan pengembangan *fuzzy* parametrik oleh Hanss (2005), penelitian ini tidak hanya memformulasikan ulang operasi-operasi tersebut tetapi juga menyesuaikannya untuk bentuk parametrik bilangan *fuzzy* oktagonal. Hal ini penting untuk meningkatkan keakuratan, stabilitas, dan keterterapan operasi dalam sistem *fuzzy* yang kompleks.

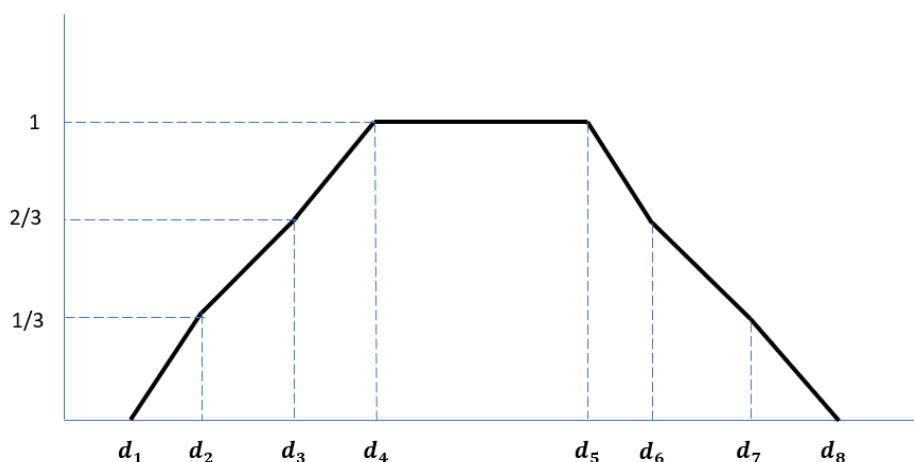
2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian matematis yang bertujuan untuk memodifikasi dan memvalidasi operasi aritmetika dasar pada bilangan *fuzzy* oktagonal. Fokus utama penelitian ini terletak pada perumusan ulang dan pengujian operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan invers, baik pada bentuk eksplisit maupun parametrik dari bilangan *fuzzy* oktagonal. Dalam penelitian ini yang disajikan adalah bentuk representasi bilangan *fuzzy* oktagonal yang berbeda dengan peneliti sebelumnya. Pada penelitian sebelumnya oleh sundar, disajikan representasi bilangan *fuzzy* oktagonal berbentuk sebagai berikut.

Definisi 2.1. Sebuah bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8)$ dikatakan bilangan *fuzzy* oktagonal jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{x - d_1}{d_2 - d_1} \right), & d_1 \leq x \leq d_2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{x - d_2}{d_3 - d_2} \right), & d_2 \leq x \leq d_3 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{x - d_3}{d_4 - d_3} \right), & d_3 \leq x \leq d_4 \\ 1 & d_4 \leq x \leq d_5 \\ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x - d_5}{d_6 - d_5} \right), & d_5 \leq x \leq d_6 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{x - d_6}{d_7 - d_6} \right), & d_6 \leq x \leq d_7 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{d_8 - x}{d_8 - d_7} \right), & d_7 \leq x \leq d_8 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5 \leq d_6 \leq d_7 \leq d_8$ merupakan bilangan real.



Sedangkan pada paper ini memberikan representasi bilangan oktagonal *fuzzy* dengan bentuk yaitu $(p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, dimana p dan q adalah titik pusat, sedangkan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ merupakan lebar interval kiri dan $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ lebar interval kanan serta bentuk parametriknya yang menggunakan interval fungsi keanggotaan berbasis parameter r , $0 \leq r \leq 1$. Subjek ini dipilih karena dinilai mampu merepresentasikan ketidakpastian dengan lebih detail dibandingkan bentuk *fuzzy* lainnya.

Prosedur penelitian diawali dengan studi literatur mendalam terkait teori dasar bilangan *fuzzy* dan perkembangan operasi *fuzzy*, khususnya operasi pada bilangan *fuzzy* oktagonal. Kemudian, dilakukan formulasi ulang terhadap operasi aritmetika dasar dengan memperhatikan sifat tertutup, asosiatif, dan keberadaan invers, khususnya pada operasi perkalian yang oleh

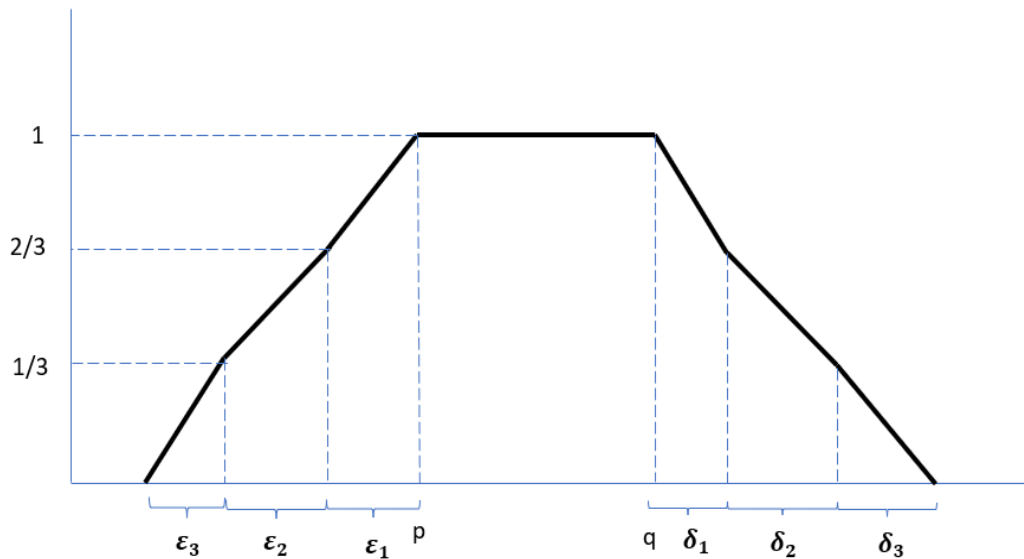
peneliti sebelumnya belum dibahas secara lengkap. Operasi-operasi ini selanjutnya diterapkan pada contoh numerik untuk mengevaluasi konsistensi hasil terhadap logika *fuzzy*. Modifikasi juga dilakukan pada bentuk parametrik bilangan *fuzzy* oktagonal agar operasi yang dihasilkan tetap valid pada seluruh tingkat r , $0 \leq r \leq 1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Awalnya bilangan *fuzzy* oktagonal diberikan oleh peneliti pendahulu seperti bentuk pada Definisi 2.1., namun pada bagian ini akan dipaparkan hasil penelitian terkait bentuk lain dari bilangan *fuzzy* oktagonal, yakni $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ dimana p dan q adalah titik pusat, sedangkan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ adalah lebar interval pada bagian kiri pusat dan $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ adalah lebar interval pada bagian kanan titik pusat.

Definisi 3.1. Bilangan *fuzzy* $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ dikatakan bilangan *fuzzy* oktagonal jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{x - p + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\alpha_3} \right), & p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \leq x \leq p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{x + \varepsilon_1 - p}{\varepsilon_2} \right), & p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq x \leq p - \varepsilon_1 \\ 1 + \frac{1}{3} \frac{(x - p)}{\varepsilon_1}, & p - \varepsilon_1 \leq x \leq p \\ 1, & p \leq x \leq q \\ 1 - \frac{1}{3} \frac{(x - q)}{\delta_1}, & q \leq x \leq q + \delta_1 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{x - \delta_1 - q}{\delta_2} \right), & q + \delta_1 \leq x \leq q + \delta_1 + \delta_2 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{q + \delta_1 + \delta_2 - x}{\delta_3} \right), & q + \delta_1 + \delta_2 \leq x \leq q + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$



Definisi 3.2 Bilangan *fuzzy* oktagonal $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ dengan himpunan $\tilde{u}: R \rightarrow [0,1]$ yang memenuhi syarat berikut:

- (i) $\tilde{u}$ adalah semikontinu atas.
- (ii) $\tilde{u} = 0$ diluar interval $[p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, q + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3]$.
- (iii) Terdapat bilangan p, q yang terletak di dalam interval $[p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, q + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3]$ sehingga
 - (a) $\tilde{u}$ monoton naik pada interval $[p - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, p]$
 - (b) $\tilde{u}$ monoton turun pada interval $[q, q + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3]$,
 - (c) $\tilde{u} = 1$, untuk $p \leq x \leq q$.

Definisi 3.3. Dua bilangan *fuzzy* oktagonal dikatakan sama jika setiap elemennya sama, yakni

$\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ dan $\tilde{v} = (r, s, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dengan $\tilde{u} = \tilde{v}$ jika $p = r, q = s, \varepsilon_1 = \gamma_1, \varepsilon_2 = \gamma_2, \varepsilon_3 = \gamma_3, \delta_1 = \omega_1, \delta_2 = \omega_2$, dan $\delta_3 = \omega_3$.

Definisi 3.4. Bilangan *fuzzy* oktagonal dikatakan bilangan *fuzzy* oktagonal nol jika semua elemen di dalamnya nol, yakni $\tilde{v} = (0,0,0,0,0,0,0,0)$.

Definisi 3.5. Misalkan terdapat dua bilangan *fuzzy* oktagonal $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ dan $\tilde{v} = (r, s, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Maka beberapa operasi Aritmetika didefinisikan sebagai berikut.

1. Penjumlahan

$$\tilde{u} \oplus \tilde{v} = (p + r, q + s, \varepsilon_1 + \gamma_1, \varepsilon_2 + \gamma_2, \varepsilon_3 + \gamma_3, \delta_1 + \omega_1, \delta_2 + \omega_2, \delta_3 + \omega_3)$$

2. Pengurangan

$$\tilde{u} \ominus \tilde{v} = (p - r, q - s, \varepsilon_1 + \gamma_1, \varepsilon_2 + \gamma_2, \varepsilon_3 + \gamma_3, \delta_1 + \omega_1, \delta_2 + \omega_2, \delta_3 + \omega_3)$$

Catatan : Setiap bilangan $\tilde{u}_1 = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, terdapat bilangan *fuzzy* oktagonal $\tilde{u}_2 = (p, q, -\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3, -\delta_1, -\delta_2, -\delta_3)$ sehingga $\tilde{u} \ominus \tilde{v} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

3. Perkalian Skalar

$$\begin{aligned} \lambda \oplus \tilde{u} &= (\lambda p, \lambda q, \lambda \varepsilon_1, \lambda \varepsilon_2, \lambda \varepsilon_3, \lambda \delta_1, \lambda \delta_2, \lambda \delta_3), & \lambda \geq 0 \\ \lambda \oplus \tilde{u} &= (\lambda p, \lambda q, -\lambda \delta_3, -\lambda \delta_2, -\lambda \delta_1, -\lambda \varepsilon_1, -\lambda \varepsilon_2, -\lambda \varepsilon_3), & \lambda < 0 \end{aligned}$$

4. Perkalian

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{v}(r) = [(p.A) + 1, (q.A) + 1, (\varepsilon_1.A), (\varepsilon_2.A), (\varepsilon_3.A), (\delta_1.A), (\delta_2.A), (\delta_3.A)]$$

$$\text{dengan } A = \frac{r+s+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\omega_1+\omega_2+\omega_3}{6}$$

5. Invers terhadap perkalian.

Dari rumusan perkalian di atas, kita dapat mendefinisikan sebuah invers $\tilde{u}(r)^{-1}$ sehingga

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Sebagai bentuk validasi aritmetika perkalian, maka diberikan teorema berikut yang memperlihatkan bahwa terdapat invers terhadap perkalian sehingga jika bilangan *fuzzy* oktagonal tersebut dikalikan dengan bilangan invers, maka akan menghasilkan suatu bilangan oktagonal identitas, yakni dalam hal ini

Teorema 3.6 Misalkan terdapat bilangan *fuzzy* oktagonal $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$

maka terdapat

$$\tilde{u}(r)^{-1} = (A - p, A - q, A - \varepsilon_1, A - \varepsilon_2, A - \varepsilon_3, A - \delta_1, A - \delta_2, A - \delta_3)$$

dengan

$$A = \frac{p+q+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\delta_1+\delta_2+\delta_3}{6}$$

sehingga

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Bukti.

Menggunakan konsep perkalian yang diberikan pada Definisi 3.5. Bagian 4, maka akan dibuktikan bahwa $\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{r}(r) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

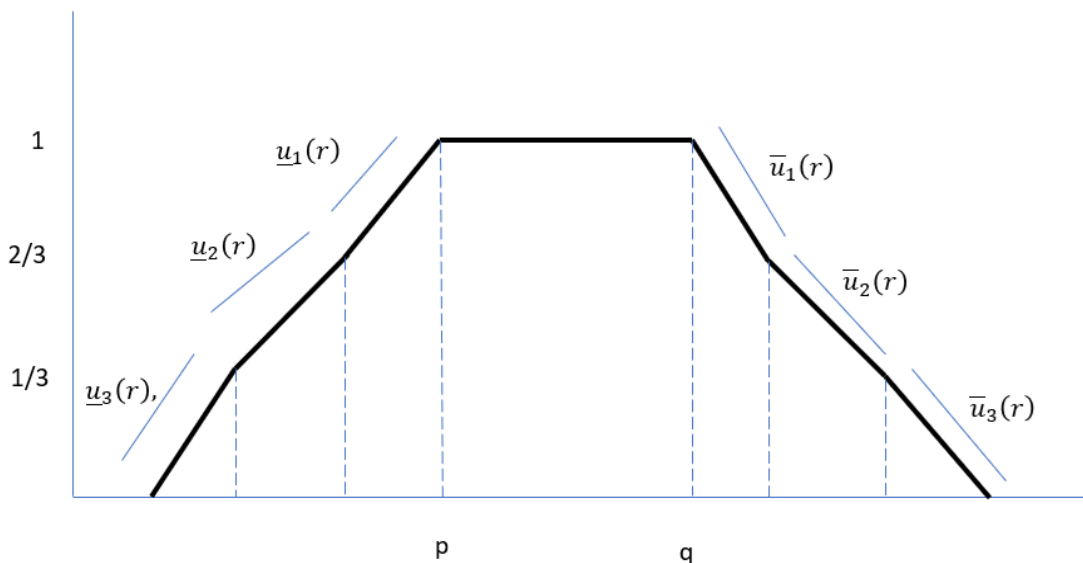
Definisikan terlebih dahulu $\tilde{u}(r)^{-1} = (A - p, A - q, A - \varepsilon_1, A - \varepsilon_2, A - \varepsilon_3, A - \delta_1, A - \delta_2, A - \delta_3)$, sehingga diperoleh rata-rata dari komponen pada $\tilde{u}(r)^{-1}$, yakni

$$\begin{aligned} B &= \frac{((A - p) + (A - q) + (A - \varepsilon_1) + (A - \varepsilon_2) + (A - \varepsilon_3) + (A - \delta_1) + (A - \delta_2) + (A - \delta_3))}{6} \\ &= \frac{(6A - (p + q + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3))}{6} = \frac{6A - 6A}{6} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga menggunakan aturan perkalian yang sudah didefinisikan, diperoleh

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = [(pB) + 1, (qB) + 1, \varepsilon_1 B, \varepsilon_2 B, \varepsilon_3 B, \delta_1 B, \delta_2 B, \delta_3 B] = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]. \blacksquare$$

Selanjutnya, akan dibahas operasi Aritmetika Pada Bilangan *fuzzy* Oktagonal yang direpresentasikan dalam bentuk Parametrik



Definisi 3.7. Bilangan *fuzzy* oktagonal $\tilde{v} = (r, s, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, w_2, w_3)$ dapat direpresentasikan menjadi bentuk parametrik $\tilde{v}(r) = [\underline{v}_3(r), \underline{v}_2(r), \underline{v}_1(r), \bar{v}_1(r), \bar{v}_2(r), \bar{v}_3(r)]$, $0 \leq r \leq 1$ yang dapat dinyatakan menjadi

- $\underline{v}_3(r) = r - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3(3r - 1)$
- $\underline{v}_2(r) = r - \gamma_1 + \gamma_2(3r - 2)$
- $\underline{v}_1(r) = r + \gamma_1(3r - 3)$
- $\bar{v}_1(r) = q - \omega_1(3r - 3)$
- $\bar{v}_2(r) = q + \omega_1 + \omega_2(2 - 3r)$
- $\bar{v}_3(r) = q + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3(1 - 3r)$

Sama halnya dengan bentuk aljabar *fuzzy* oktagon yang didefinisikan pada Definisi 3.5., bentuk aljabar *fuzzy* yang direpresentasikan secara parametrik juga dapat diberikan operasi aritmetiknya sehingga terhadap operasi perkalian, dapat kita temukan inversnya dan dapat kita validasi Kembali hasilnya.

Definisi 3.8 Misalkan bilangan *fuzzy* oktagon parametrik didefinisikan untuk $0 \leq r \leq 1$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) &= [\underline{u}_3(r), \underline{u}_2(r), \underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r), \bar{u}_2(r), \bar{u}_3(r)] \\ \tilde{v}(r) &= [\underline{v}_3(r), \underline{v}_2(r), \underline{v}_1(r), \bar{v}_1(r), \bar{v}_2(r), \bar{v}_3(r)]\end{aligned}$$

Maka operasi aritmetiknya adalah

1. Penjumlahan :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \oplus \tilde{v}(r) &= (\underline{u}_3(r) + \underline{v}_3(r), \underline{u}_2(r) + \underline{v}_2(r), \underline{u}_1(r) + \underline{v}_1(r), \bar{u}_1(r) + \bar{v}_1(r), \bar{u}_2(r) \\ &\quad + \bar{v}_2(r), \bar{u}_3(r) + \bar{v}_3(r))\end{aligned}$$

2.

Pengurangan

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \ominus \tilde{v}(r) &= (\underline{u}_3(r) - \underline{v}_3(r), \underline{u}_2(r) - \underline{v}_2(r), \underline{u}_1(r) - \underline{v}_1(r), \bar{u}_1(r) - \bar{v}_1(r), \bar{u}_2(r) \\ &\quad - \bar{v}_2(r), \bar{u}_3(r) - \bar{v}_3(r))\end{aligned}$$

3.

Perkalian Skalar

$$\begin{aligned}\lambda \otimes \tilde{u}(r) &= \lambda \otimes [\underline{u}_3(r), \underline{u}_2(r), \underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r), \bar{u}_2(r), \bar{u}_3(r)] \\ &= [\lambda \underline{u}_3(r), \lambda \underline{u}_2(r), \lambda \underline{u}_1(r), \lambda \bar{u}_1(r), \lambda \bar{u}_2(r), \lambda \bar{u}_3(r)], \quad \lambda \geq 0 \\ &= [\lambda \bar{u}_1(r), \lambda \bar{u}_2(r), \lambda \bar{u}_3(r), \lambda \underline{u}_3(r), \lambda \underline{u}_2(r), \lambda \underline{u}_1(r)], \quad \lambda < 0\end{aligned}$$

4. Perkalian

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r) \otimes \tilde{v}(r) &= [(\underline{u}_3(r).A) + 1, (\underline{u}_2(r).A) + 1, (\underline{u}_1(r).A) + 1, (\bar{u}_1(r).A) \\ &\quad + 1, (\bar{u}_2(r).A) + 1, (\bar{u}_3(r).A) + 1]\end{aligned}$$

Dengan $A = \frac{\underline{v}_3(r) + \underline{v}_2(r) + \underline{v}_1(r) + \bar{v}_1(r) + \bar{v}_2(r) + \bar{v}_3(r)}{6}$

5. Invers terhadap perkalian.

Dari rumusan perkalian di atas, kita dapat mendefinisikan sebuah invers $\tilde{u}(r)^{-1}$ sehingga $\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Teorema 3.9.. Misalkan terdapat bilangan *fuzzy* oktagon dalam bentuk parametriknya

$$\tilde{u}(r) = [\underline{u}_3(r), \underline{u}_2(r), \underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r), \bar{u}_2(r), \bar{u}_3(r)],$$

maka terdapat

$$\tilde{u}(r)^{-1} = (A - \underline{u}_3(r), A - \underline{u}_2(r), A - \underline{u}_1(r), A - \underline{u}_1(r), A - \bar{u}_2(r), A - \bar{u}_3(r))$$

dengan

$$A = \frac{\underline{u}_3(r) + \underline{u}_2(r) + \underline{u}_1(r) + \bar{u}_1(r) + \bar{u}_2(r) + \bar{u}_3(r)}{6}$$

sehingga

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Bukti.

Menggunakan konsep perkalian yang diberikan pada Definisi 3.8. no 4, maka akan dibuktikan bahwa

$$\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Definisikan terlebih dahulu $\tilde{u}(r)^{-1} = (A - \underline{u}_3(r), A - \underline{u}_2(r), A - \underline{u}_1(r), A - \underline{u}_1(r), A - \bar{u}_2(r), A - \bar{u}_3(r))$, sehingga diperoleh rata-rata dari komponen pada $\tilde{u}(r)^{-1}$, yakni

$$\begin{aligned} B &= \frac{(A - \underline{u}_3(r) + A - \underline{u}_2(r) + A - \underline{u}_1(r) + A - \underline{u}_1(r) + A - \bar{u}_2(r) + A - \bar{u}_3(r))}{6} \\ &= \frac{(6A - (\underline{u}_3(r) + \underline{u}_2(r) + \underline{u}_1(r) + \underline{u}_1(r) + \bar{u}_2(r) + \bar{u}_3(r)))}{6} = \frac{6A - 6A}{6} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga menggunakan aturan perkalian yang sudah didefinisikan, diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} &= [(\underline{u}_3(r).B) + 1, (\underline{u}_2(r).B) + 1, (\underline{u}_1(r).B) + 1, (\bar{u}_1(r).B) + \\ &1, (\bar{u}_2(r).B) + 1, (\bar{u}_3(r).B) + 1] = [1, 1, 1, 1, 1, 1] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Hal ini serupa dengan kita mengatakan hasilnya adalah $[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ jika kita pandang sebagai bilangan *fuzzy* oktagon $\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Contoh 3.10. Misalkan diberikan bilangan *fuzzy* oktagon $\tilde{u}$ dan $\tilde{v}$

$$\tilde{u} = (p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = (7, 9, 2, 1, 1, 1, 1, 2)$$

Berdasarkan Teorema 3.6., maka terdapat

$$\tilde{u}(r)^{-1} = (A - p, A - q, A - \varepsilon_1, A - \varepsilon_2, A - \varepsilon_3, A - \delta_1, A - \delta_2, A - \delta_3)$$

dengan

$$A = \frac{p+q+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\delta_1+\delta_2+\delta_3}{6}$$

Pertama, hitung A terlebih dahulu. Diperoleh $A = 4$. Maka

$$\tilde{u}(r)^{-1} = (-3, -5, 2, 3, 3, 3, 2)$$

Sehingga diperoleh $\tilde{u}(r) \otimes \tilde{u}(r)^{-1} = \tilde{i}(r) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Cara yang sama dapat juga berlaku untuk bilangan *fuzzy* oktagonal berbentuk parametrik.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil memodifikasi operasi aritmetika dasar pada bilangan *fuzzy* oktagonal, khususnya perkalian dan invers, baik dalam bentuk eksplisit maupun parametrik. Modifikasi yang dilakukan didasarkan pada kelemahan yang ditemukan dalam penelitian-penelitian sebelumnya, terutama ketiadaan definisi invers yang valid dalam operasi perkalian *fuzzy* oktagonal. Hasil formulasi ulang menunjukkan bahwa operasi yang dimodifikasi mampu memberikan hasil yang lebih presisi, stabil, dan konsisten terhadap prinsip dasar logika *fuzzy*.

Melalui pendekatan matematis dan contoh numerik, diperoleh bahwa modifikasi ini memberikan penyederhanaan komputasi dan meningkatkan validitas operasi dalam aplikasi nyata, seperti penyelesaian sistem linear *fuzzy* dan model optimisasi berbasis *fuzzy*. Selain itu, bentuk parametrik dari bilangan *fuzzy* oktagonal memberikan fleksibilitas tambahan dalam melakukan operasi aritmetika yang dapat disesuaikan dengan tingkat keanggotaan r .

Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi teoretis yang signifikan dalam pengembangan teori bilangan *fuzzy* oktagonal dan membuka peluang penerapan yang lebih luas di bidang sistem kontrol *fuzzy*, pengambilan keputusan multikriteria, serta pengembangan perangkat lunak simulasi yang berbasis logika *fuzzy*. Penelitian lanjutan direkomendasikan untuk mengeksplorasi penerapan modifikasi ini dalam konteks multidimensi dan sistem dinamis yang lebih kompleks.

REFERENSI

- Arfina, I., & adi, M. (2020). Alternative Arithmetic of Pentagonal Fuzzy Numbers. International Journal of Mathematics Trends and Technology, 66(12), 28–36. <https://doi.org/10.14445/22315373/ijmtt-v66i12p505>
- Ghadle, K. P., & Pathade, P. A. (2016). Optimal Solution of Balanced and Unbalanced Fuzzy Transportation Problem Using Hexagonal Fuzzy Numbers. International Journal of

- Mathematical Research, 5(2), 131–137.
<https://doi.org/10.18488/journal.24/2016.5.2/24.2.131.137>
- Harun, S., Mashadi, M., & Gemawati, S. (2020). Alternative Determines Positivity of Hexagonal Fuzzy Numbers and Their Alternative Arithmetic. International Journal of Management and Fuzzy Systems, 6(1), 1. <https://doi.org/10.11648/j.ijmfs.20200601.11>
- Mashadi, Safitri, Y., & Sukono. (2023). Multiplication and inverse operations in parametric form of triangular fuzzy number. Mathematics and Statistics, 11(1), 28–33.
<https://doi.org/10.13189/ms.2023.110104>
- Mashadi, Safitri, Y., Sukono, Prihanto, I. G., Johansyah, M. D., & Saputra, M. P. A. (2024). The Inverse and General Inverse of Trapezoidal Fuzzy Numbers with Modified Elementary Row Operations. Mathematics, 12(7), 1–15. <https://doi.org/10.3390/math12070946>
- P, R., A, S. S., & R, K. (2013). A New Operation on Hexagonal Fuzzy Number. International Journal of Fuzzy Logic Systems, 3(3), 15–26. <https://doi.org/10.5121/ijfls.2013.3302>
- Sundarr, S., & Sundararajan, S. (2022). A note on arithmetic operations of octagonal fuzzy numbers using α -cut method. International Journal of Advanced Research in Science, Communication and Technology, 2(2), 1–5.
https://www.researchgate.net/publication/362092014_A_Note_on_Arithmetic_Operations_of_Octagonal_Fuzzy_Numbers_Using_-Cut_Method
- Zadeh, L. A., Introduction, I., & Navy, U. S. (1965). Fuzzy Sets * -. 353, 338–353.