

Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$

I Gede Danur Prabawa Semara^{1*}, I Nengah Suparta², Raphita Yanisari Silalahi³

¹Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Ganesha.

^{2,3}Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Ganesha

Email Corresponding Author : danur@student.undiksha.ac.id

Info Artikel

Article history:

Kirim: 29/01/2026
Perbaikan: 28/02/2026
Terima: 30/02/2026
Publikasi: 16/03/2026

Kata-kata kunci:

Pelabelan graf;
Pelabelan harmonis
Ganjil;
Graf Super *Diamond*.

ABSTRAK

Sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ memenuhi pelabelan harmonis ganjil jika dan hanya jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$ menginduksi suatu fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$, dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Graf yang memiliki pelabelan harmonis ganjil disebut graf harmonis ganjil. Pada paper ini, graf yang akan dikaji harmonisan ganjilnya adalah graf rantai dengan m blok $K_{2,n}(C_4)$. Graf rantai ini dinamakan graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$. Hasil kajian menunjukkan bahwa graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$, dengan $m, n \geq 1$, adalah harmonis ganjil.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki relevansi tinggi dengan berbagai fenomena dan permasalahan dalam kehidupan nyata (Ayu, et al., 2022). Konsep graf telah banyak dimanfaatkan sebagai alat pemodelan untuk merepresentasikan serta menganalisis struktur hubungan dalam berbagai konteks. Salah satu penerapan yang umum dijumpai adalah pada peta jaringan penerbangan, yang memuat informasi mengenai bandara dan rute penerbangan. Dalam kerangka teori graf, setiap bandara dapat direpresentasikan sebagai titik, sedangkan rute penerbangan yang menghubungkan antar bandara dimodelkan sebagai sisi (Budayana & Suparta, 2025). Secara umum, graf G didefinisikan sebagai suatu pasangan himpunan (V, E) yang dinyatakan dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V merupakan himpunan titik yang tidak kosong, sedangkan E adalah himpunan sisi yang masing-masing menghubungkan sepasang titik dalam graf tersebut (Kristhina, et al., 2025).

Terdapat beberapa topik menarik dalam teori graf, salah satunya terkait dengan pelabelan. Pelabelan merupakan salah satu topik pada teori graf yang masih terus berkembang (Narita, et al., 2021). Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang menghubungkan elemen-elemen graf dengan himpunan bilangan tertentu (Dewi, 2022). Suparta & Ariawan (2020) juga mengemukakan bahwa pelabelan graf merupakan proses pemberian bilangan bulat tidak negatif pada setiap titik, sisi, atau keduanya, yang dilakukan berdasarkan aturan atau kriteria tertentu yang harus dipenuhi.

Pelabelan harmonis diperkenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980 (Rahman, 2024). Pelabelan ini merupakan jenis pelabelan titik, dimana titik-titik graf dilabeli dengan bilangan bulat tidak negatif, sehingga label sisi yang diinduksi merupakan bilangan ganjil. Beberapa penelitian sebelumnya telah mengeksplorasi pelabelan harmonis ganjil pada berbagai jenis graf. Penelitian dari Sari & Budayasa (2023) mengemukakan sejumlah sifat yang dimiliki oleh pelabelan harmonis ganjil dan membuktikan bahwa graf lingkaran C_n merupakan graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod{4}$. Penelitian dari Kolo, et al. (2023) menunjukkan bahwa graf gabungan lingkaran $C_{m,n} \cong e C_4$ memenuhi pelabelan harmonis ganjil. Selanjutnya, Firmansah (2019) membuktikan bahwa graf Bunga *Double Quadrilateral* $FDQ(m)$ dan $FVDQ(m)$ dengan $m \geq 1$ memenuhi pelabelan harmonis ganjil. Lebih lanjut yang menjadi acuan pengembangan dari penelitian ini yakni dari Amri, et al. (2018) yang membuktikan bahwa gabungan graf $2S_n(C_{4,n})$, memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil, sehingga termasuk dalam graf harmonis ganjil.

Penelitian ini secara khusus berfokus kepada pelabelan harmonis ganjil pada graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$. Pelabelan pada graf ini memiliki karakteristik yang sangat unik dan menarik. Karakteristik uniknya terletak pada keharusan semua label sisi bernilai ganjil, yang mengimplikasikan bahwa setiap sisi harus menghubungkan satu titik berlabel genap dan satu titik berlabel ganjil, sehingga graf harus merupakan graf bipartit. Selain itu, pelabelan ini menuntut keunikan hasil penjumlahan dan mengharuskan munculnya seluruh bilangan ganjil dalam rentang tertentu.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode konstruksi langsung (*direct construction method*). Metode ini dipilih karena sesuai dengan tujuan penelitian, yaitu untuk membuktikan eksistensi pelabelan harmonis ganjil pada graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$. Langkah-langkah penelitian dimulai dengan menentukan struktur graf, dimana struktur graf pada penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian Amri, et al. (2018).

Selanjutnya untuk mendefinisikan graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$, diperlukan definisi graf $K_{2,n}(C_4)$ yang dibangun dengan cara sebagai berikut. Untuk graf bipartit lengkap $K_{2,n}$ dinotasikan partisi-partisinya:

$$V_1 \text{ yang terdiri dari dua elemen} \tag{2.1}$$

dan

$$V_2 \text{ yang terdiri dari } n \text{ elemen.} \tag{2.2}$$

Graf $K_{2,n}(C_4)$ adalah graf yang dibentuk dari $K_{2,n}$ dengan mensubstitusikan pada semua titik di V_2 dengan graf lingkaran C_4 . Selanjutnya, didefinisikan bentuk graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ sebagai graf rantai dengan m blok $K_{2,n}(C_4)$ dimana setiap dua blok yang berurutan terhubung pada sebuah titik di partisi V_1 .

Langkah berikutnya menentukan pelabelan, yaitu fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$ yang menginduksi suatu fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$,

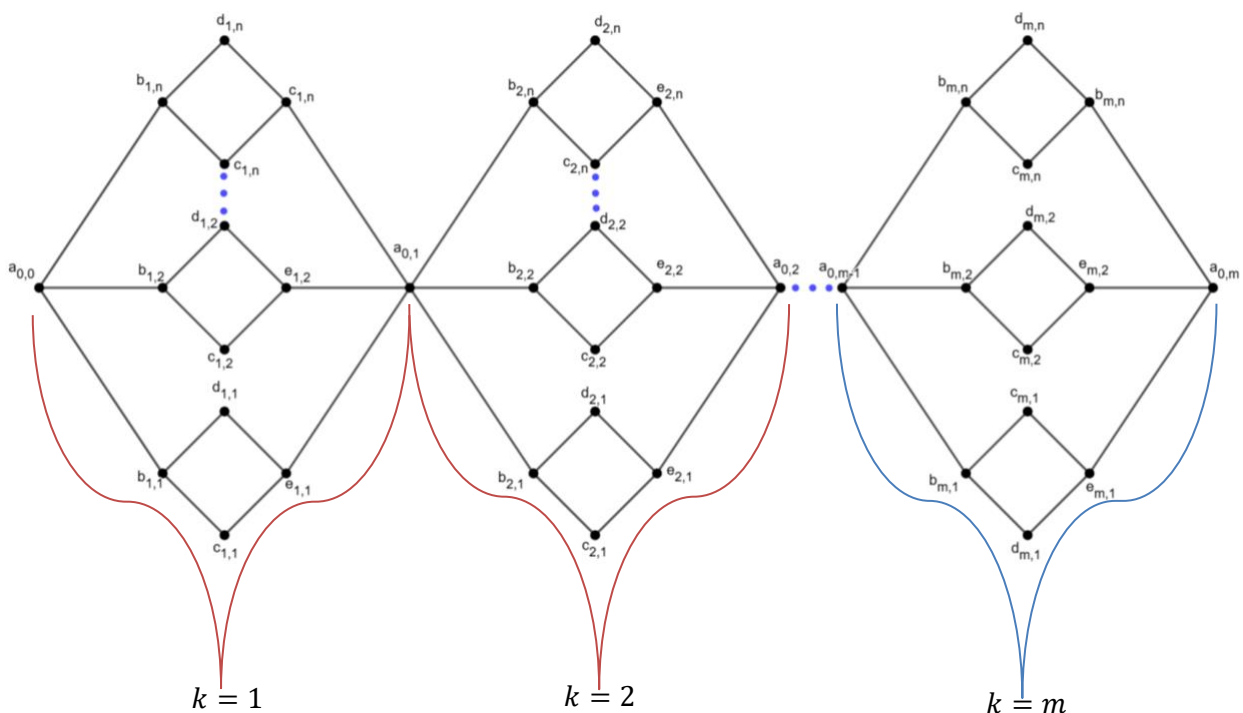
dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Setelah itu, pelabelan titik dilakukan secara sistematis dengan mengatur nilai setiap titik sedemikian rupa sehingga jumlah antara dua titik yang saling bertetangga merupakan bilangan ganjil, yang merupakan label dari sisi yang berkaitan. Setiap label sisi harus bernilai positif ganjil yang tidak melebihi $2q - 1$ dimana q merupakan banyaknya sisi dari graf. Dilakukan juga verifikasi sifat pelabelan harmonis ganjil dengan membuktikan bahwa syarat pelabelan harmonis ganjil adalah fungsi injektif menginduksi suatu fungsi bijektif, dimana setiap nilai $f^*(uv)$ berbeda untuk setiap label sisi dan semua label sisi berasal dari penjumlahan dua titik yang terhubung. Metode konstruksi langsung ini diterapkan salah satunya pada penelitian Suparta & Suharta (2020) dalam pelabelan pada beberapa tipe graf rantai.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Pengertian dan Konstruksi Graf Super Diamond $SD_{m,n}$

Graf Super Diamond $SD_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$, merupakan graf rantai dengan m blok graf $K_{2,n}(C_4)$, dimana untuk setiap dua blok yang berurutan terhubung pada sebuah titik dari partisi V_1 sebagaimana pada Persamaan (2.1)



Gambar 1. Konstruksi Graf Super Diamond $SD_{m,n}$

Penotasian titik dari graf Super Diamond $SD_{m,n}$ ditentukan sebagai berikut,

$$V(G) = \{a_{0,k} | k = 0, 1, 2, \dots, m\} \cup \{b_{k,i}, c_{k,i}, d_{k,i}, e_{k,i} | k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n\},$$

dimana $m + 1$ titik penghubung rantai $a_{0,1}, a_{0,2}, \dots, a_{0,m+1}$, disebut sebagai titik-titik potong (*cut points*) dari graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$. Sementara itu, sisi-sisi dari graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ ditentukan seperti berikut,

$$E(G) = \{a_{0,k}b_{k,i}, a_{0,k+1}e_{k,i}, b_{k,i}c_{k,i}, b_{k,i}d_{k,i}, c_{k,i}e_{k,i}, d_{k,i}e_{k,i} \mid k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Pada graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ banyaknya titik pada graf, sama dengan $4nm + (m + 1)$, $m, n \geq 1$, dan banyaknya sisi dari graf, sama dengan $6mn$, $m, n \geq 1$. Untuk label titik tertinggi yang dapat digunakan, sama dengan $6mn$ dan label sisi tertinggi, sama dengan $12mn - 1$.

Pembahasan

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$ merupakan graf harmonis ganjil. Kenyataan ini dirumuskan pada teorema berikut.

Teorema 1: Untuk bilangan bulat m dan n , graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$, dengan $m, n \geq 1$, merupakan graf harmonis ganjil

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif untuk pelabelan titik $f: V(SD_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 6mn\}$.

$$f(a_{0,k}) = 6kn, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

$$f(b_{k,i}) = 6kn - 6n + 2i - 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

$$f(c_{k,i}) = 6kn - 6i + 4, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$f(d_{k,i}) = 6kn - 6i + 2, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$f(e_{k,i}) = 6kn - 2n + 2i - 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Pada Persamaan (3.1), untuk $k = 0, 1, 2, \dots, m$, label-label titik yang dihasilkan yaitu $\{0, 6n, 12n, 18n, \dots, 6mn\}$. Artinya semua label titik pada $a_{0,k}$ merupakan kelipatan $6n$ dan jelas berbeda untuk setiap dua titik yang berbeda:

$$a_{0,k_1} \neq a_{0,k_2}; k_1 \neq k_2$$

Dalam hal ini,

$$f(a_{0,k_1}) = 6k_1n \neq 6k_2n = f(a_{0,k_2}), \text{ karena } k_1 \neq k_2$$

Dari Persamaan (3.2), jika di perhatikan bagian $2i - 1$. Diperoleh $\{2i - 1 \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\} = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$, merupakan himpunan bilangan-bilangan ganjil. Dalam hal ini $\{f(b_{k,i}) \mid k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan kelipatan $6n$ ditambah suatu bilangan ganjil berbeda.

Untuk lebih jelasnya perhatikan daftar dari $\{f(b_{k,i}) \mid k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n\}$ berikut.

$$\{f(b_{1,i}) \mid i = 1, 2, \dots, n\} = \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$$

$$\begin{aligned} \{f(b_{2,i})|i = 1, 2, \dots, n\} &= \{6n + 1, 6n + 3, \dots, 6n + 2n - 1\} \\ \{f(b_{3,i})|i = 1, 2, \dots, n\} &= \{12n + 1, 12n + 3, \dots, 12n + 2n - 1\} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \{f(b_{m,i})|i = 1, 2, \dots, n\} &= \{6n(m - 1) + 1, \dots, 6n(m - 1) + 2n - 1\} \end{aligned}$$

Dari Persamaan (3.3), diperoleh bahwa setiap label $f(c_{k,i})$ merupakan bilangan genap untuk setiap $k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$. Dengan mudah dapat dilihat bahwa label-label dari titik $c_{k,i}$ merupakan bilangan genap yang berbeda. Sementara untuk setiap label $f(c_{k,i})$ menghasilkan bilangan genap berbeda dari setiap label $f(a_{0,k})$ yang ditunjukkan sebagai berikut.

$$f(c_{k,i}) - f(a_{0,k}) = (6kn - 6i + 4) - (6kn) = 6i + 4$$

Label-label pada setiap titik $c_{k,i}$ selalu $6i + 4$ lebih besar dari label-label pada setiap titik $d_{k,i}$, sehingga tidak mungkin menghasilkan label titik yang sama.

Sama seperti Persamaan (3.1) dan (3.3), pada Persamaan (3.4) setiap label $f(d_{k,i})$ merupakan bilangan genap setiap $k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$. Dapat dilihat bahwa label-label dari titik $d_{k,i}$ merupakan bilangan genap yang berbeda. Sementara untuk setiap label $f(d_{k,i})$ menghasilkan bilangan genap berbeda dari setiap label $f(c_{k,i})$ dan $f(a_{0,k})$ yang ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(d_{k,i}) - f(a_{0,k}) &= (6kn - 6i + 2) - (6kn) = 6i + 2 \\ f(d_{k,i}) - f(c_{k,i}) &= (6kn - 6i + 2) - (6kn - 6i + 4) = 2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Label-label pada setiap titik $d_{k,i}$ selalu 2 lebih kecil dari $c_{k,i}$ dan $6i + 2$ lebih besar dari $a_{0,k}$, sehingga tidak mungkin menghasilkan label titik yang sama.

Sama seperti Persamaan (3.2), pada Persamaan (3.5), diperoleh bahwa setiap label $f(e_{k,i})$ merupakan bilangan ganjil setiap $k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$. Sementara untuk setiap label $f(e_{k,i})$ menghasilkan bilangan ganjil yang berbeda dari setiap label $f(b_{k,i})$ yang ditunjukkan sebagai berikut.

$$f(e_{k,i}) - f(b_{k,i}) = (6kn - 2n + 2i - 1) - (6kn - 6n + 2i - 1) = 4n$$

Label-label pada setiap titik $e_{k,i}$ selalu $4n$ lebih besar dari $c_{k,i}$, sehingga tidak mungkin menghasilkan label titik yang sama.

Syarat pelabelan titik memenuhi fungsi injektif adalah setiap dua titik berbeda $u, v \in (SD_{m,n})$: $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$. Telah dibuktikan bahwa setiap pelabelan titik memiliki bentuk fungsi yang berbeda dan interval nilai yang tidak saling beririsan. Dengan demikian, pelabelan titik $f: V(SD_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 6nm\}$ memenuhi sifat injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan juga bahwa pelabelan f yang menginduksi pelabelan sisi f^* bersifat bijektif.

$$f^*(a_{0,k-1} b_{k,i}) = 12kn - 12n + 2i - 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

$$f^*(b_{k,i} c_{k,i}) = 12kn - 6n - 4i + 3, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

$$f^*(b_{k,i} d_{k,i}) = 12kn - 6n - 4i + 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

$$f^*(c_{k,i} e_{k,i}) = 12kn - 2n - 4i + 3, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

$$f^*(d_{k,i} e_{k,i}) = 12kn - 2n - 4i + 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

$$f^*(e_{k,i} a_{0,k}) = 12kn - 2n + 2i - 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Ketika setiap persamaan disubstitusikan dengan nilai k dan i yang berbeda, maka menghasilkan himpunan bilangan ganjil yang berbeda. Begitu juga jika untuk masing-masing persamaan disubstitusikan dengan nilai k dan i yang sama, maka menghasilkan bilangan ganjil yang berbeda yang diindikasikan oleh kombinasi jumlahan suku kedua $(-12n, -6n, -2n)$, suku ketiga $(2i, -4i)$, suku konstan $(-1, +1, +3)$.

Jadi,

$$a_{0,k} b_{k,i} \neq b_{k,i} c_{k,i} \neq b_{k,i} d_{k,i} \neq c_{k,i} e_{k,i} \neq d_{k,i} e_{k,i} \neq e_{k,i} a_{0,k}$$

Dalam hal ini,

$$f^*(a_{0,k} b_{k,i}) \neq f^*(b_{k,i} c_{k,i}) \neq f^*(b_{k,i} d_{k,i}) \neq f^*(c_{k,i} e_{k,i}) \neq f^*(d_{k,i} e_{k,i}) \neq f^*(e_{k,i} a_{0,k})$$

Untuk setiap $a_{0,k} b_{k,i}, b_{k,i} c_{k,i}, b_{k,i} d_{k,i}, c_{k,i} e_{k,i}, d_{k,i} e_{k,i}, e_{k,i} a_{0,k} \in E(SD_{m,n})$

Dengan demikian fungsi f^* memenuhi sifat injektif.

Telah dibuktikan bahwa fungsi f^* memenuhi fungsi injektif. Untuk membuktikan bahwa f^* bersifat bijektif, selanjutnya dibuktikan bahwa f^* memenuhi sifat surjektif.

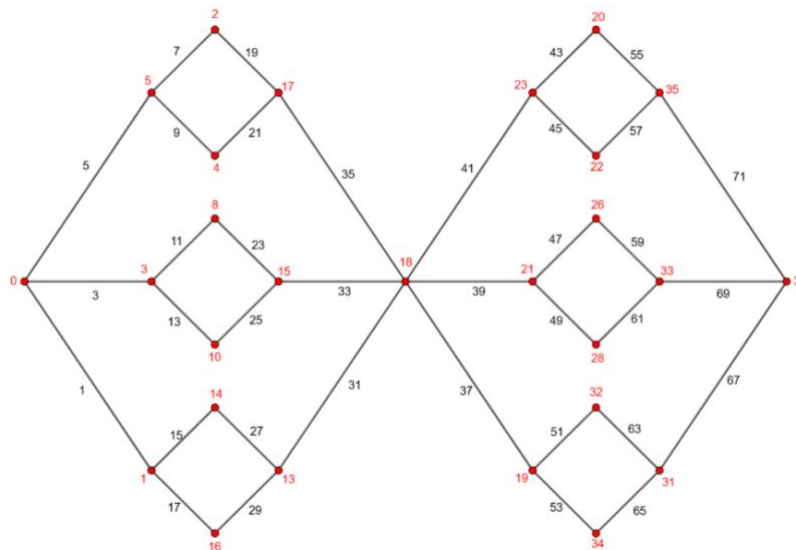
Dari fungsi label titik yang telah di daftar sebelumnya, nilai minimum label sisi terletak pada $f^*(a_{0,1} b_{1,1}) = 1$. Sementara itu, nilai maksimum label sisi terletak pada: $f^*(e_{m,n} b_{0,m}) = 12mn - 1$. Sehingga, $f^*E(SD_{m,n}) \subseteq \{1, \dots, 12mn - 1\} = \{1, \dots, 2(6mn) - 1\}$.

Karena banyaknya sisi pada graf adalah $6mn = q$ sebagai domain, dan pada pelabelan harmonis ganjil himpunan label sisi yang digunakan adalah $\{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ dengan label sisi tertinggi $2q - 1 = 2(6mn) - 1$ sebagai kodomain, maka setiap elemen pada kodomain tersebut tepat mempunyai satu prapeta. Dengan demikian fungsi pelabelan sisi f^* memenuhi sifat surjektif. Sehingga pelabelan titik $f^*E(SD_{m,n}) \rightarrow \{1, 3, \dots, 12mn - 1\}$ memenuhi sifat bijektif.

Terbukti bahwa graf Super Diamond $SD_{m,n}$ adalah graf harmonis ganjil.

Contoh

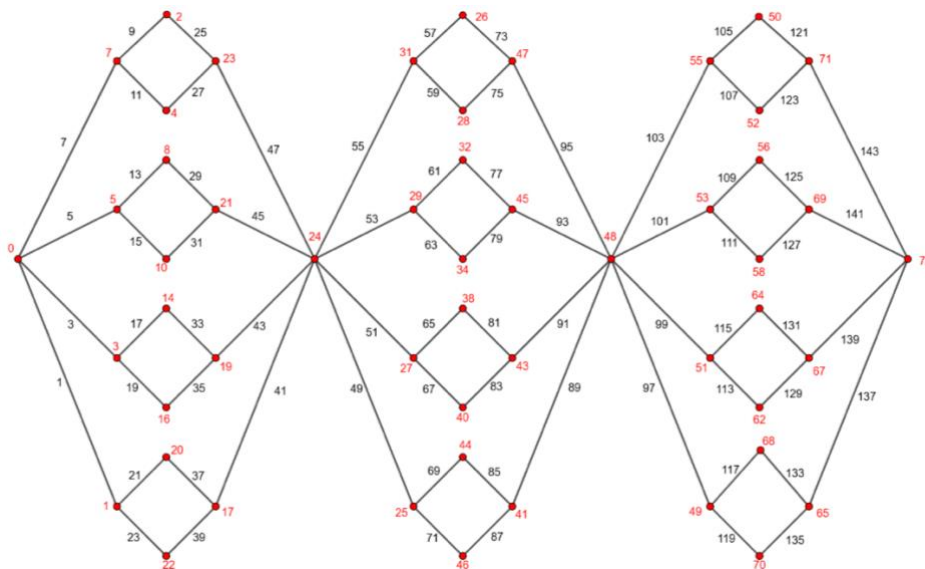
Berikut merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf Super Diamond $SD_{m,n}$ dengan $m = 2$ dan $n = 3$.



Gambar 2. Graf Super *Diamond* $SD_{2,3}$ dengan Pelabelan Harmonis Ganjil

Graf Super *Diamond* $SD_{2,3}$ memiliki label titik tertinggi yang dapat digunakan, sama dengan 36 dan label sisi tertinggi, sama dengan 71. Sementara untuk banyaknya titik, sama dengan 36 dan banyaknya sisi, sama dengan 71. Terlihat pada gambar untuk masing-masing titik memenuhi fungsi injektif $f: V(SD_{2,3}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$ menginduksi fungsi bijektif $f^*: E(SD_{2,3}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 71\}$ dimana berlaku $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ untuk masing-masing label sisi $uv \in E(SD_{2,3})$. Dengan demikian Graf Super *Diamond* $SD_{2,3}$ memenuhi sifat-sifat pelabelan harmonis ganjil.

Selanjutnya juga akan dibuktikan pelabelan harmonis ganjil pada graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ dengan $m = 3$ dan $n = 4$.



Gambar 3. Graf Super *Diamond* $SD_{3,4}$ dengan Pelabelan Harmonis Ganjil

Graf Super *Diamond* $SD_{3,4}$ memiliki label titik tertinggi yang dapat digunakan, sama dengan 72 dan label sisi tertinggi, sama dengan 143. Sementara untuk banyaknya titik, sama dengan 52 dan banyaknya sisi, sama dengan 72. Terlihat pada gambar untuk masing-masing titik memenuhi fungsi injektif $f: V(SD_{3,4}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 34, 38, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 58, 62, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 72\}$ menginduksi fungsi bijektif $f^*: E(SD_{3,4}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 143\}$ dimana berlaku $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ untuk masing-masing sisi $uv \in E(SD_{3,4})$. Dengan demikian Graf Super *Diamond* $SD_{3,4}$ memenuhi sifat-sifat pelabelan harmonis ganjil.

4. KESIMPULAN

Graf Super *Diamond* $SD_{m,n}$ merupakan suatu graf rantai dengan m blok graf $K_{2,n}(C_4)$ yang memenuhi pelabelan harmonis ganjil, sesuai dengan pembuktian pada teorema 1. Dalam pembuktiannya telah berhasil ditunjukkan bahwa masing-masing fungsi pelabelan titik $f: V(SD_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 6mn\}$ memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi pelabelan sisi $f^*: E(SD_{m,n}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 12mn - 1\}$. Diberikan juga beberapa contoh pelabelan harmonis ganjil graf Super *Diamond* $SD_{2,3}$, $SD_{3,2}$, dan $SD_{3,4}$, sedemikian sehingga masing-masing graf tersebut memenuhi pelabelan harmonis ganjil.

Pada penelitian dan pengembangan graf ini penulis menyadari masih terdapat kekurangan, salah satunya penulis membatasi hanya mensubstitusi C_4 pada setiap titik di partisi V_2 . Sebagai bahan penelitian selanjutnya, mensubstitusikan lingkaran C_t , dengan t genap yang lebih dari 4 juga cukup menarik dikaji keharmonisan ganjilnya.

REFERENSI

- Amri, Z., Aulia, A., Syella, A., Pratamal, H., Ramadhani, S., & Chairunnisa. (2018). Pelabelan harmonis ganjil pada graf 2 $S_n(C_{4,n})$. *EduTech: Jurnal Ilmu Pendidikan dan Ilmu Sosial*, 4(1), 87–91.
- Ayu, D. N. A. A., Suparta, I. N., & Putu, S. I. G. (2022). Graceful Labeling of Some Join Graphs. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 6(2), 129-144. <https://doi.org/10.26740/jram.v6n2.p129-144>.
- Budayana, I. N., & Suparta, I. N. (2025). Kekuatan Ketakteraturan Modular Pada Graf Rantai $C(nC_4)$. *Wahana Matematika Dan Sains: Jurnal Matematika, Sains, Dan Pembelajarannya*, 19(1), 46–51. <https://doi.org/10.23887/wms.v19i1.80813>.
- Firmansah, F. (2020). Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Bunga *Double Quadrilateral*. *Jurnal Ilmiah Sains*, 20(1), 12–17. <https://doi.org/10.35799/jis.20.1.2020.27278>.
- Dewi, P. K. (2022). The Modular Irregularity Strength of $C_n \odot mK_1$. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(2), 160–169. <https://doi.org/10.15408/inprime.v4i2.26935>.

DOI: <https://doi.org/10.63976/jimat.v7i1.1296>

- Kolo, D., Ginting, K. B., & Putra, G. L. (2023). Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf $C_{m,n} \oplus C_4$. *Jurnal Diferensial*, 5(1), 22–28. <https://doi.org/10.35508/jd.v5i1.9824>.
- Krithina, N. N. T. I., Hartawan, I. G. N. Y., & Silalahi, R. Y. (2025). Bilangan Kromatik Graceful Ganjil Pada Hasil Operasi Comb Graf Tangga Dan Lintasan. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(2), 558–565.
- Narita, N. L. P. D. S., Suparta, I. N., & Sukajaya, I. N. (2021). Kekuatan Ketidakteraturan Sisi Graf Rantai $C[C^{(m)}_n]$, $n=5,7$. *Wahana Matematika dan Sains: Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya*, 15(2), 16–26.
- Rahman, A. N. A. (2024). *Pelabelan harmonis ganjil pada graf hasil operasi comb graf siklus dan graf bintang*. Tesis tidak dipublikasikan, Universitas Hasanuddin.
- Sari, J. M., & Budayasa, I. K. (2023). Pelabelan Harmonis Ganjil Kuat Beberapa Kelas Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(3), 328-338.
- Suparta, I. N., & Ariawan, I. D. M. A. (2020). Expanding Graceful Trees. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 8(2), 217–232.
- Suparta, I. N., & Suharta, I. G. P. (2020). A Note on Edge Irregularity Strength of Some Graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 4(1), 10-20. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2020.4.1.2>.