

## Analysis Model Matematika Penyebaran Tuberculosis Dengan Penerapan Kendali Penyuluhan Masyarakat

Nilwan Andiraja<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

*Email Corresponding Author : [nilwanandiraja@uin-suska.ac.id](mailto:nilwanandiraja@uin-suska.ac.id)*

---

### Info Artikel

#### Article history:

Kirim, 9 November 2025  
Terima, 21 Dosemebr 2025

Publikasi Online, 23 Desember 2025

---

#### Kata-kata kunci:

Analysis Model  
Matematika;  
Penyebaran  
Tuberculosis;  
Penerapan Kendali  
Penyuluhan.

---

### ABSTRAK

Penelitian ini membahas efektifitas kendali penyuluhan masyarakat untuk pencegahan penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur. Tuberkulosis (TB) perlu dicegah penyebarannya di Jawa Timur dan di Indonesia umumnya karena laporan dari Global TB Report 2024, Indonesia menempati nomor dua di Dunia dalam hal kasus terinfeksi Tuberkulosis (TB). Penelitian dimulai dengan membentuk model matematika baru ,yang disebut dengan persamaan *state*, dengan cara menambahkan kendali baru yaitu penyuluhan masyarakat di kelas *susceptible* dan dibentuk fungsi tujuan baru untuk meminimalkan kelas terinfeksi Tuberkulosis (TB). Dengan prinsip *Pontryagin* kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian. Selanjutnya dari fungsi Hamiltonian diperoleh persamaan *costate* dan fungsi kendali optimal. Proses dilanjutkan dengan menggunakan metode *sweep step forward* diperoleh bentuk numerik dari persamaan *state* dan metode *sweep step backward* diperoleh bentuk numerik persamaan *costate*. Kemudian dengan menggunakan Runge-Kutta orde 4, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan data-data pada penelitian terdahulu. Simulasi menggunakan software Matlab tersebut menghasilkan bahwa kendali penyuluhan masyarakat dapat menurunkan persentase individu terinfeksi Tuberkulosis (TB). Penurunan ini mengakibatkan persentase individu yang membutuhkan pengobatan Tuberkulosis (TB) juga mengalami penurunan. Karena persentase individu yang diobati menurun maka persentasi individu yang sembuh dari Tuberkulosis (TB) juga menurun akibat tidak adanya individu yang terinfeksi Tuberkulosis (TB). Oleh karena itu, disimpulkan kendali penyuluhan masyarakat efektif mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur.

---

## 1. PENDAHULUAN

Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular yang pada umumnya menyerang paru-paru dan diakibatkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* tetapi dapat juga oleh *M. canetti*, *M. microti*, *M. africanum* dan *M. bovis* meskipun jarang terjadi. *Mycobacterium* merupakan basil tahan asam (BTA), memiliki dinding sel yang khas dan sangat kompleks. Bakteri ini dapat mati jika terkena suhu 80°C selama 5 menit dan mudah mati jika terkena sinar ultraviolet, tapi bakteri ini dapat bertahan selama berbulan-bulan pada lingkungan dengan

suhu kamar dan ruang yang lembab (Annashr et al., 2022). Kemampuan menular dan bertahan dalam waktu yang lama menyebabkan penyakit ini sangat berbahaya dan dapat berakibat fatal jika tidak dicegah penyebarannya atau tidak diberi penanganan yang tepat (Sukarsih et al., 2023). Hal ini tercermin dari dari kejadian Tuberkulosis (TB) di Indonesia bahwa berdasarkan Global TB Report 2024, Indonesia menempati posisi kedua dunia dalam hal beban kasus TBC setelah India. Diperkirakan terdapat 1.090.000 kasus TBC dan 125.000 kematian setiap tahun, yang berarti ada sekitar 14 kematian setiap jamnya. Pada tahun 2024, ditemukan sekitar 885 ribu kasus TBC, dengan distribusi yang menunjukkan bahwa 496 ribu kasus terjadi pada laki-laki, 359 ribu pada perempuan, serta 135 ribu kasus pada anak-anak usia 0-14 tahun. Statistik ini menegaskan urgensi peningkatan upaya pencegahan dan pengobatan di seluruh wilayah Indonesia (Kemenkes RI, 2025). Berdasarkan hal tersebut maka perlu dilakukan penelitian untuk mencegah penyebaran penyakit Tuberkulosis (TB). Pemodelan matematika merupakan salah satu cara yang terbaik dalam mempelajari penyebaran suatu penyakit dan kombinasi dengan aplikasi kendali optimal merupakan salah satu cara meneliti yang terbaik untuk mencegah suatu penyakit menyebar lebih luas.

Beberapa penelitian model matematika tentang penyebaran Tuberkulosis (TB) diantaranya penelitian kestabilan penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan metode Lyapunov menggunakan model SEIR, dengan hasil vaksin dapat mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) (Fadillah, 2023). Hasil yang sama dengan model SEIR juga menghasilkan bahwa mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan obat, meningkatkan kekebalan tubuh, dan masker (Nafisah & Adi, 2024). Penelitian lain yang juga menggunakan vaksin dan pengobatan juga telah dilakukan dengan model SVEITR agar penyebaran Tuberkulosis (TB) dapat dicegah.(Hamdin et al., 2025). Model yang lain juga telah dilakukan untuk untuk mempelajari Tuberkulosis (TB) yaitu dengan model SVEIL dengan hasil vaksinasi dapat mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) (Harianto & Tuturop, 2023). Penelitian lain yang menggunakan model SEITR menghasilkan pengobatan dan vaksinasi dapat membantu menekan penyebaran pengobatan dan vaksinasi (Muniroh, 2025). Penelitian lain tentang model matematika juga telah dilakukan dengan hasil bahwa jika pengobatan dimaksimalkan dan laju kelahiran di tekan maka suatu daerah akan bebas dari penyebaran Tuberkulosis (TB) (Sulistiyowati & Abadi, 2023). Model SVIR dengan upaya vaksinasi dan pembatasan kontak juga telah dilakukan dengan hasil upaya tersebut dapat menekan penyebaran Tuberkulosis (TB) (Nugroho et al., 2023). Selanjutnya, penelitian yang sama yaitu model SVIR upaya vaksinasi dan menekan laju kontak dengan penderita untuk mencegah penyebaran penyakit Tuberkulosis (TB) dengan model SVIR juga telah dilakukan dengan hasil bahwa upaya tersebut dapat mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) (Putri & Abadi, 2024). Penelitian lain yang mengaitkan antara penderita Tuberkulosis (TB) terinfeksi COVID-19 juga telah dilakukan dengan hasil bahwa pengobatan dapat mencegah penyebaran kedua penyakit tersebut (Safira Putri Islamiati et al., 2023). Penelitian lain tentang penyebaran Tuberkulosis (TB) menggunakan model SIR untuk daerah Jepara dengan hasil pada penelitian ini yaitu terdapat satu orang terinfeksi dapat menginfeksi rata-rata 28 orang (Bahari et al., 2023).

Sementara itu, penelitian penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan model SITR telah dilakukan untuk daerah Jawa timur dengan menganalisa laju pengobatan dan hasil yang diperoleh bahwa di provinsi Jawa Timur Tuberkulosis (TB) berpotensi mewabah dengan cakupan lebih luas sehingga perlu upaya untuk mencegah dan mengendalikan penyakit ini (F. Y. Sari et al., 2024). Berdasarkan seluruh penelitian yang menggunakan model matematika untuk meneliti penyebaran Tuberkulosis (TB) dapat disimpulkan bahwa penyakit ini dapat dicegah penyebarannya tapi penelitian-penelitian ini belum ada yang menggunakan tambahan kendali optimal dalam upaya pencegahan penyakit Tuberkulosis (TB). Penelitian dari (F. Y. Sari et al., 2024) telah menyatakan bahwa perlu upaya untuk mengendalikan penyebaran Tuberkulosis (TB) sehingga perlu penelitian gabungan model matematika dan kendali optimal untuk mencegah penyabaran penyakit ini.

Penelitian-penelitian yang terkait dengan aplikasi kendali optimal dengan model matematika untuk pencegahan Tuberkulosis (TB) diantaranya yaitu penelitian dengan model matematika SVITR dengan kendali vaksinasi dan penyuluhan masyarakat dari hasil penelitian diperoleh bahwa kedua kendali tersebut dapat menurunkan dengan efektif kasus Tuberkulosis (TB)(Ochieng, 2025). Penelitian yang lain juga berkaitan dengan pencegahan penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan model matematika SVEIR dengan kendali penyuluhan masyarakat dan pengobatan dengan hasil pada penelitian ini yaitu kedua kendali atau gabungan kedua kendali ini kunci utama untuk mengendalikan penyakit Tuberkulosis (TB) (Alfiniyah et al., 2025). Penelitian lain tentang aplikasi kendali optimal dalam mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) dengan kendali vaksinasi dan pengobatan menghasilkan bawah kedua kendali yang diteliti pada penelitian ini dapat mengendalikan penyebaran Tuberkulosis (TB) di kota Semarang (Mahardika & Kartika, 2024). Penelitian pengendalian penyebaran Tuberkulosis (TB) juga telah dilakukan dengan hasil kendali vaksinasi, kendali deteksi, dan pengobatan dapat mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) (Peter et al., 2024). Penelitian tentang kendali optimal pada COVID-19 dan Tuberkulosis (TB) *co-infection* juga telah dilakukan dengan kendali vaksinasi dan diperoleh hasil bahwa vaksinasi dapat mengurangi infeksi Tuberkulosis (TB) pada manusia (Diabaté et al., 2024). Berdasarkan pembahasan penelitian-penelitian terdahulu tentang aplikasi kendali optimal untuk pencegahan penyebaran Tuberkulosis (TB). Secara umum telah banyak diteliti efektifitas vaksinasi, dan pengobatan dalam berbagai scenario dan berbagai model di berbagai lokasi. Sementara itu penelitian tentang efek kampanye kesehatan masyarakat yang akan menurunkan penyebaran Tuberkulosis (TB) belum banyak dilakukan. Selanjutnya, masih sedikit penelitian-penelitian tentang aplikasi kendali untuk mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB) di daerah Jawa Timur karena berdasarkan penelitian (F. Y. Sari et al., 2024), Tuberkulosis (TB) memiliki potensi mewabah di Jawa timur sehingga perlu dikendalikan penyebarannya.

Oleh karena itu, penelitian ini akan meneliti suatu kendali yang masih jarang diteliti yaitu kendali penyuluhan masyarakat. Kendali ini akan diberikan di kelas  $S(t)$  (*Susceptible*) dimana pemberian kendali ini sebagai pencegahan sedini mungkin untuk mencegah penyebaran Tuberkulosis (TB). Sehingga penelitian ini bertujuan untuk meneliti atau

menganalisa keefektifan kendali penyuluhan masyarakat dalam upaya menurunkan jumlah orang terinfeksi Tuberkulosis (TB). Selanjutnya untuk mendapatkan hasil tersebut maka dalam penelitian ini akan diaplikasikan prinsip *Pontryagin* dengan metode *sweep forward-backward*. Kemudian akan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk simulasi numerik. Kaeftifan dari kendali penyuluhan masyarakat akan bahaya Tuberkulosis (TB) diharapkan akan memberi gambaran bagi pihak-pihak terkait dalam upaya mencegah sekaligus menurunkan jumlah orang terinfeksi Tuberkulosis (TB).

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan mengikuti beberapa tahapan yang di susun mulai dari pembentukan model matematika sampai dengan simulasi numerik dan terakhir penarikan kesimpulan. Pembentukan model matematika pada penelitian ini yaitu dengan memodifikasi model matematika penyebaran Tuberkulosis (TB) yang telah ada dari penelitian (F. Y. Sari et al., 2024) yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha N - S(t) \left( \frac{\beta I(t)}{N} + \mu \right) \quad (1a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - I(t)(\epsilon + \theta) \quad (1b)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \epsilon I(t) - T(t)(\gamma + \theta) \quad (1c)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma T(t) - R(t)\mu \quad (1d)$$

dengan jumlah populasi yaitu

$$N = S(t) + I(t) + T(t) + R(t).$$

Keterangan notasi yang digunakan yaitu :

$N$  : Total populasi.

$S(t)$  : Banyak individu rentan dalam waktu tertentu

$I(t)$  : Banyak individu terinfeksi dalam waktu tertentu.

$T(t)$  : Banyak individu penderita yang terobati dalam waktu tertentu.

$R(t)$  : Banyak individu sembuh dalam waktu tertentu.

$\alpha$  : Laju populasi penduduk.

$\mu$  : Laju kematian alami.

$\beta$  : Laju individu terinfeksi.

$\theta$  : Laju kematian akibat tuberculosis.

$\epsilon$  : Laju individu terinfeksi diberi treatment.

$\gamma$  : Laju individu berhasil treatment.

Asumsi yang berlaku untuk Persamaan (1a)-(1d), menurut (F. Y. Sari et al., 2024) adalah jumlah tingkat kelahiran dan jumlah tingkat kematian alami memiliki nilai yang sama; terdapat orang yang meninggal secara alami karena faktor penyakit lain dan faktor usia;

kompartemen/kelas  $I(t)$  (*infected*) dipengaruhi tingkat penyebaran atau penularan, dan ada hubungan antara rentan dan terinfeksi.

Langkah pertama, Persamaan (1a)-(1d) akan di modifikasi dengan menambahkan kendali penyuluhan masyarakat yang akan disimbolkan dengan  $u(t)$  maka akan didapatkan model matematika baru *SITR* penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur, model matematika baru ini dinamakan persamaan *state*. Kendali  $u(t)$  ini akan ditambahkan ke dalam kelas  $S(t)$ , kendali ini akan berbentuk proporsi sehingga akan berbentuk  $(1 - u(t))$ . Kendali ini diletakkan di kelas  $S(t)$  sebab penyuluhan masyarakat perlu diberikan sedini mungkin kepada masyarakat sebelum terinfeksi Tuberkulosis (TB). Setelah pembentukan model, selanjutnya akan dibentuk fungsi tujuan yang akan meminimalkan banyak individu terinfeksi Tuberkulosis (TB).

Langkah berikutnya, setelah dibentuk model matematika dengan pemberian kendali  $u(t)$  dan dibentuk fungsi tujuan, dengan menggunakan prinsip *Pontryagin* akan dibentuk fungsi Hamiltonian berdasarkan model matematika kendali  $u(t)$  dan fungsi tujuan. Fungsi Hamiltonian yang dibentuk akan digunakan untuk membentuk persamaan *costate* dan untuk mendapatkan kendali optimal penyuluhan masyarakat. Berikutnya, dengan menggunakan metode *sweep forward-backward*, akan dibentuk numerik dari persamaan *state* dengan *forward steep* dan untuk bentuk numerik dari persamaan *costate* akan digunakan *backward steep* (Lenhart & Workman, 2007).

Selanjutnya, dengan bantuan metode Runge-Kutta orde 4 akan dilakukan simulasi numerik (Nisa & Syata, 2024). Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan data-data yang diperoleh dari (F. Y. Sari et al., 2024). Hal ini dilakukan agar mendapatkan perbandingan hasil antara sebelum diberi kendali dan setelah diberi kendali. Terakhir, berdasarkan hasil simulasi numerik akan dianalisa hasilnya dan disusun kesimpulan akhir untuk mengukur efektif atau tidak penggunaan kendali penyuluhan masyarakat dalam pencegahan penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Hasil Penelitian

##### Model Matematika dengan Kendali Penyuluhan Masyarakat

Model matematika penyebaran Tuberkulosis (TB) tanpa kendali pada Persamaan (1a)-(1d) akan diberikan kendali penyuluhan masyarakat ( $u(t)$ ), kendali ini akan ditambahkan di kelas  $S(t)$ . Kendali ini akan berbentuk proporsi sehingga model matematika pada Persamaan (1a)-(1d) menjadi,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha N - \beta \left(1 - u(t)\right) \left(\frac{S(t)I(t)}{N}\right) - \mu S(t) \quad (2a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta \left(1 - u(t)\right) S(t) I(t)}{N} - I(t)(\epsilon + \theta) \quad (2b)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \epsilon I(t) - T(t)(\gamma + \theta) \quad (2c)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma T(t) - R(t)\mu \quad (2d)$$

Fungsi tujuan yang dibentuk sebagai berikut :

$$J(u(t)) = \int_0^{T_f} \left( c_1 I(t) + \frac{c_2 u(t)^2}{2} \right) dt \quad (3)$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  adalah nilai-nilai parameter.

Selanjutnya dengan prinsip Pontryagin akan digunakan untuk membentuk fungsi Hamiltonian, persamaan *costate* dan mendapatkan kendali optimal penyuluhan masyarakat. Berdasarkan Persamaan (2) dan (3) akan dibentuk Fungsi Hamiltonian sebagai berikut :

$$\begin{aligned} H = & \left( c_1 I(t) + \frac{c_2 u(t)^2}{2} \right) + \lambda_1 \left( \alpha N - \beta (1 - u(t)) \left( \frac{S(t)I(t)}{N} \right) - \mu S(t) \right) \\ & + \lambda_2 \left( \frac{\beta (1 - u(t)) S(t) I(t)}{N} - I(t)(\epsilon + \theta) \right) + \lambda_3 (\epsilon I(t) - T(t)(\gamma + \theta)) \\ & + \lambda_4 (\gamma T(t) - R(t)\mu) \end{aligned} \quad (4)$$

Langkah berikutnya, berdasarkan prinsip Pontryagin adalah membentuk persamaan *costate* dari Persamaan (4) yaitu

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial S(t)} = \frac{\lambda_1 \beta (1 - u(t)) I(t)}{N} + \lambda_1 \mu - \frac{\lambda_2 \beta (1 - u(t)) I(t)}{N} \quad (5a)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial I(t)} = -c_1 + \frac{\lambda_1 \beta S(t) (1 - u(t))}{N} - \frac{\lambda_2 \beta S(t) (1 - u(t))}{N} + \lambda_2 (\epsilon + \theta) - \lambda_3 \epsilon \quad (5b)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial T(t)} = \lambda_3 (\gamma + \theta) - \lambda_4 \gamma \quad (5c)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial R(t)} = \lambda_4 \mu \quad (5d)$$

Setelah diperoleh persamaan *costate*, berikutnya berdasarkan fungsi Hamiltonian di Persamaan (4), maka diperoleh

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u(t)} = c_2 u(t) + \frac{\lambda_1 \beta S(t) I(t)}{N} - \frac{\lambda_2 \beta S(t) I(t)}{N}$$

Sehingga diperoleh

$$u(t) = -\frac{\beta S(t) I(t)}{c_2 N} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Maka fungsi kendali yang optimal dapat dinyatakan sebagai berikut

$$u^* = \max \left( 0, \min \left( 1, -\frac{\beta S(t) I(t)}{c_2 N} (\lambda_1 - \lambda_2) \right) \right).$$

Kendali optimal diatas merupakan kendali optimal yang didapat menggunakan prinsip *Pontryagin* untuk kasus penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur dengan persamaan *state* dan persamaan *costate* pada persamaan (2a)-(2d) dan (5a)-(5d).

### Simulasi Numerik

Setelah dibentuk persamaan *state* untuk kasus penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur pada Persamaan (2a)-(2d) dan persamaan *costate* pada Persamaan (5a)-(5d), serta telah diperoleh fungsi kendali optimal penyuluhan masyarakat. Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik akan dilakukan dengan menggunakan software Matlab. Simulasi numerik akan dilakukan dengan menggunakan data-data yang didapat dari penelitian (F. Y. Sari et al., 2024). data-data tersebut disajikan pada tabel berikut :

**Tabel 1.** Variabel dan Parameter

Simbol	Nilai
$\mu$	0.95
$\alpha$	0.985
$\theta$	0.0209
$\gamma$	0.85
$\beta$	0.5
$\epsilon$	0.5
$S(t)$	39978776
$I(t)$	23628
$T(t)$	18565
$R(t)$	39265
$N(t)$	40060234

Sumber : Sari et al., 2024

Sebelum melakukan simulasi numerik, perlu terlebih dahulu untuk mendapatkan solusi persamaan (2a)-(2d) dan Persamaan (5a)-(5d). Oleh karena Persamaan (2a)-(2d) dan (5a)-(5d) berbentuk nonlinier yang sulit diselesaikan secara analitik, maka perlu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan selanjutnya penyelesaian menggunakan iterasi numerik. Penyelesaian dibagi atas dua langkah yaitu *forward step* untuk persamaan *state* dan *backward step* untuk persamaan *costate*.

Forward step untuk persamaan *state* dengan metode Runge kutta orde 4 yaitu dengan  $M_{k,s}$  sebagai notasi  $\frac{dS(t)}{dt}$ , notasi  $M_{k,I}$  untuk  $\frac{dI(t)}{dt}$ , notasi  $M_{k,T}$  untuk  $\frac{dT(t)}{dt}$ , notasi  $M_{k,R}$  untuk  $\frac{dR(t)}{dt}$ , dengan  $k$  = orde ke- $k$ . Maka *forward step* orde pertama yaitu

$$M_{1,s} = \alpha N - \beta(1 - u_i) \left( \frac{S_i I_i}{N} \right) - \mu S_i$$

$$M_{1,I} = \frac{\beta(1 - u_i) S_i I_i}{N} - I_i(\epsilon + \theta)$$

$$M_{1,T} = \epsilon I_i - T_i(\gamma + \theta)$$

$$M_{1,R} = \gamma T_i - R_i \mu$$

Proses dilakukan sampai *forward step* orde 4.

Selanjutnya, untuk persamaan *costate* dinotasikan  $\lambda_1 = \lambda S_j, \lambda_2 = \lambda I_j, \lambda_3 = \lambda T_j, \lambda_4 = \lambda R_j$  dan disimbolkan juga untuk notasi  $N_{k,S}$  untuk  $\dot{\lambda}_1$ , notasi  $N_{k,I}$  untuk  $\dot{\lambda}_2$ , notasi  $N_{k,T}$  untuk  $\dot{\lambda}_3$ , dan notasi  $N_{k,R}$  untuk  $\dot{\lambda}_4$ , dengan  $k$  = orde ke- $k$ . Maka *backward step* orde pertama yaitu

$$N_{1,S} = \frac{\lambda S_j \beta (1 - u_j) I_j}{N} + \lambda S_j \mu - \frac{\lambda I_j \beta (1 - u(t)) I_j}{N}$$

$$N_{1,I} = -c_1 + \frac{\lambda S_j \beta S_j (1 - u_j)}{N} - \frac{\lambda I_j \beta S_j (1 - u_j)}{N} + \lambda I_j (\epsilon + \theta) - \lambda T_j \epsilon$$

$$N_{1,T} = \lambda T_j (\gamma + \theta) - \lambda R_j \gamma$$

$$N_{1,R} = \lambda R_j \mu$$

Proses diatas dilakukan sampai *backward step* orde 4.

Setelah dibentuk *forward step* dan *backward step* sampai orde 4 untuk persamaan *state* dan persamaan *costate*. Maka dilakukan simulasi numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 :

Diambil tebakan awal nilai  $u^*$  untuk  $t \in [0, T_f]$ .

Langkah 2 :

Digunakan nilai awal nilai  $u^*$  pada langkah 1 untuk persamaan *state* (2a)-(2d), kemudian diselesaikan *forward-step* untuk sistem persamaan *state* menggunakan skema Runge Kutta orde 4.

Langkah 3 :

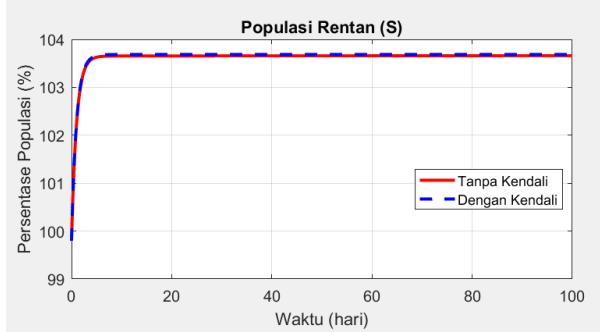
Dengan menggunakan nilai batas *costate*  $\lambda(T_f) = 0$  dan nilai kendali  $u$  dan nilai *state* dari langkah 2, diselesaikan *backward-step* untuk persamaan *costate* (5a)-(5d) menggunakan skema Runge Kutta orde 4.

Langkah 4 :

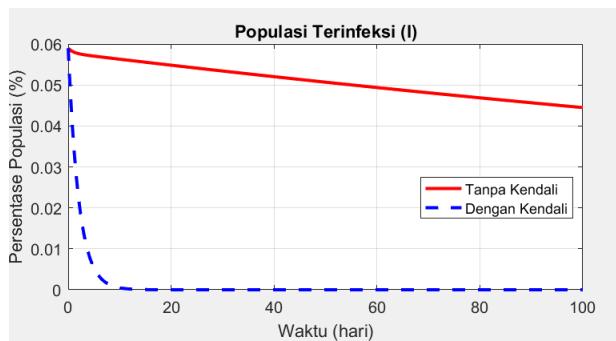
Diulang langkah iterasi dengan memperbarui nilai  $u^*$  dengan memasukkan nilai *state* dan *costate* yang baru ke Persamaan (3).

Simulasi dilakukan dengan menggunakan data-data pada tabel 1. Simulasi numerik dilakukan dengan membatasi fungsi kendali yaitu  $u_{min} < u < u_{max}$  dengan  $u_{min} = 0,1$  dan  $u_{max} = 0,9$ . Dan dilakukan dengan dua kondisi yaitu dengan tanpa kendali yaitu ( $u(t) = 0$ ) dan dengan kendali yaitu ( $u(t) \neq 0$ ). Waktu yang dipakai pada simulasi numerik di penelitian ini di mulai dari 0 hari sampai 100 hari.

Hasil simulasi numerik untuk kelas  $S(t), I(t), T(t), R(t)$  pada kasus penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur ditampilkan pada grafik setiap kelas. Grafik-grafik hasil simulasi numerik sebagai berikut :

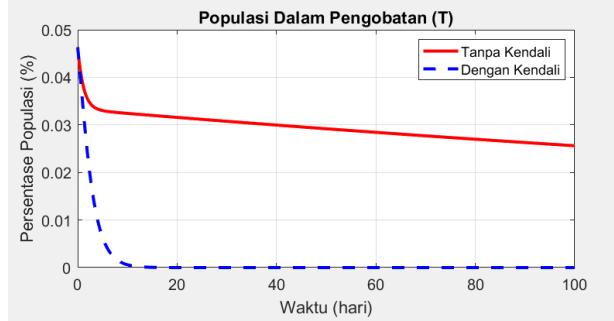
Gambar 1. Grafik kelas  $S(t)$ 

Pada gambar 1 diperoleh grafik kelas  $S(t)$  pada waktu 0 sampai 100 hari untuk kondisi dengan kendali dan tanpa kendali. Pada grafik tampak bahwa kendali yaitu penyuluhan masyarakat tentang bahaya Tuberkulosis (TB) belum menunjukkan hasil di kelas  $S(t)$ . Dapat dilihat bahwa persentase meningkat seiring waktu terjadi peningkatan dimulai dari waktu 0 sampai kurang dari sekitar 10 hari dan kemudian konstan sepanjang waktu dimulai kurang dari 20 hari sampai hari ke 100. Hal ini dapat dipahami bahwa pada kelas  $S(t)$  semua individu yang hidup dan baru lahir akan dimasukkan sebagai individu rentan, faktor lain dapat dilihat dari table bahwa angka kelahiran lebih tinggi dari angka kematian yang menyebabkan grafik mengalami peningkatan dan pada model ini belum ada kematian akibat Tuberkulosis (TB) di kelas  $S(t)$ . Sehingga semua individu akan diberikan penyuluhan masyarakat akan bahaya atau pencegahan Tuberkulosis (TB).

Gambar 2. Grafik kelas  $I(t)$ 

Gambar 2 merupakan grafik kelas individu yang terinfeksi Tuberkulosis (TB). Pada gambar 2 dihasilkan grafik dengan kendali dan tanpa kendali. Hasil grafik terlihat berbeda, walaupun ke dua grafik tanpa kendali dan dengan kendali sama-sama mengalami penurunan, tapi grafik dengan kendali mengalami penurunan yang cepat. Berdasarkan gambar 2, tampak persentase populasi terinfeksi Tuberkulosis (TB) dengan tidak diberi kendali mengalami penurunan tapi sangat lambat, terlihat mulai waktu 0 hari sampai hari ke 100, penurunan populasi terinfeksi mengalami penurunan hanya 0,02 %. Sehingga dapat dikatakan bahwa masih terdapat individu terinfeksi Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur. Sementara itu, pada grafik dengan kendali tampak mengalami penurunan yang cepat dalam waktu kurang dari 20

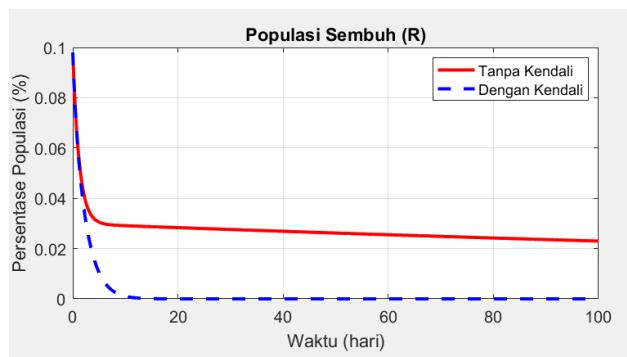
hari kendali penyuluhan masyarakat dapat menurunkan populasi individu terinfeksi sampai 0 %.



**Gambar 3.**Grafik kelas  $T(t)$

Grafik hasil untuk kelas pengobatan Tuberkulosis (TB)  $I(t)$  diberikan di gambar 3. Hasil grafik sejalan dengan grafik kelas sebelumnya yaitu grafik kelas  $I(t)$ . Pada gambar 3 dapat dilihat dengan pemberian kendali penyuluhan masyarakat akan membuat persentase individu terinfeksi Tuberkulosis (TB) yang sejalan dengan hasil bahwa penurunan individu yang perlu diobati Tuberkulosis (TB). Dari gambar tampak terjadi penurunan sampai 0% sejak kurang dari 20 hari sampai 100 hari untuk persentase populasi yang butuh obat Tuberkulosis (TB). Sementara itu untuk kondisi tanpa kendali juga sejalan dengan grafik kelas  $I(t)$ , bahwa masih ada individu butuh obat Tuberkulosis (TB) walaupun terjadi penurunan yang sedikit yaitu penurunan dari 0,05% ke mendekati 0,02%.

Hasil simulasi pada grafik 4 adalah lanjutan hasil dari grafik kelas sebelumnya yaitu grafik kelas  $I(t)$  dan  $T(t)$ . Kondisi populasi dengan adanya kendali penyuluhan masyarakat pada kedua kelas sebelumnya menunjukkan persentase infeksi yang turun tajam bahkan sampai 0% dan mengakibatkan persentase individu yang butuh obat Tuberkulosis (TB) juga tidak ada. Hal ini mengakibatkan persentase individu yang sembuh juga menurun karena individu yang diobati juga tidak ada, penurunan ini dimulai sejak kurang dari 20 hari dan konstan sampai hari ke 100.



**Grafik 4.** Grafik kelas  $R(t)$

Hasil berbeda diberikan jika kendali tidak diberikan, karena masih ada yang terinfeksi pada gambar 2 dan masih ada individu yang perlu diobati Tuberkulosis (TB) pada gambar 3, maka pada gambar 4 juga masih ada individu yang sembuh walaupun terjadi penurunan.

### Pembahasan

Hasil yang ditunjukkan dari gambar 1 sampai gambar 4 dapat dilihat bahwa aplikasi kendali penyuluhan masyarakat dalam rangka pencegahan penyebaran Tuberkulosis (TB) dapat menurunkan individu yang terinfeksi dengan efektif. Berdasarkan gambar 2, dapat dikatakan bahwa upaya penyuluhan masyarakat yang dilakukan di kelas ( $S(t)$ ) mampu mencegah individu terinfeksi Tuberkulosis (TB) di Jawa timur. Hal ini sejalan dengan penelitian (Ochieng, 2025) dan (Alfiniyah et al., 2025) bahwa upaya penyuluhan masyarakat akan menurunkan persentasi individu terinfeksi Tuberkulosis (TB).

Selanjutnya, hasil penelitian ini untuk kelas terinfeksi ( $I(t)$ ) lebih baik dibandingkan dengan hasil kelas penelitian (F. Y. Sari et al., 2024) karena pada penelitiannya terjadi peningkatan individu yang terinfeksi Tuberkulosis (TB). Hal ini dapat dipahami karena pada (F. Y. Sari et al., 2024) belum ada kendali pencegahan terinfeksi Tuberkulosis (TB) sehingga walaupun dilakukan pengobatan di kelas  $T(t)$  akan tetap ada individu baru yang terinfeksi Tuberkulosis (TB).

### 4. KESIMPULAN

Penelitian ini dimulai dengan membentuk model matematika baru untuk penyebaran Tuberkulosis (TB) di Jawa Timur. Dengan Prinsip Pontryagin, diperoleh Kendali penyuluhan masyarakat yang dalam formula matematika dipengaruhi oleh kelas  $S(t)$  dan kelas  $I(t)$ . Berdasarkan hasil simulasi numerik diperoleh gambar grafik untuk kelas  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $T(t)$ ,  $R(t)$  dimana dari gambar grafik tersebut, kendali ini efektif menurunkan individu terinfeksi Tuberkulosis (TB) bahkan dapat disimpulkan tidak ada individu yang terinfeksi Tuberkulosis (TB). Selanjutnya, penurunan individu terinfeksi Tuberkulosis (TB) juga membuat penurunan individu yang membutuhkan obat Tuberkulosis (TB).

### REFERENSI

- Alfiniyah, C., Windarto, Permatasari, N. A., Farman, M., Millah, N., & Ahmadin. (2025). Optimal control analysis of a tuberculosis model with drug-resistant population. *Statistics, Optimization and Information Computing*, 13(3), 948–960. <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-2292>
- Annashr, N. N., Nopianto, N., Sainal, A. A., & Sukmawati, S. (2022). *Penyakit di indonesia* (M. Sari & R. M. Sahara (eds.); Pertama). PT GLOBAL EKSEKUTIF TEKNOLOGI.
- Bahari, M. F., Lillah, S. S., Zahro, A., & Sari, M. P. (2023). Model SIR untuk Penyebaran Tuberkulosis di Kabupaten Jepara. *Jurnal Ilmu Komputer Dan Matematika*, 4(2), 37–43.
- Diabaté, A. B., Sangaré, B., & Koutou, O. (2024). Optimal control analysis of a COVID-19 and Tuberculosis (TB) co-infection model with an imperfect vaccine for COVID-19.

- SeMA Journal*, 81(3), 429–456. <https://doi.org/10.1007/s40324-023-00330-8>
- Fadillah, A. A. (2023). *Kajian Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tuberculosis Dengan Metode Lyapunov*. 11(2).
- Hamdin, M. S., Sani, A., & Kabil Djafar, M. (2025). Model Sveitr Pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis Dengan Faktor Vaksinasi Dan Treatment. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, 4(3), 779–789. <https://doi.org/10.33772/jmks.v4i3.106>
- Harianto, J., & Tuturop, K. L. (2023). Local Stability of Equilibrium Point of the Tuberculosis Transmission Model. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 19(3), 549–562. <https://doi.org/10.20956/j.v19i3.25843>
- Kemenkes RI. (2025). *Gerakan Indonesia Akhiri TBC*. Kemenkes RI. <https://kemkes.go.id/id/indonesias-movement-to-end-tb#:~:text=Di%20Indonesia%2C%20TBC%20masih%20menjadi%20sekitar%2014%20kematian%20setiap%20jamnya>
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). Optimal Control Applied to Biological Models. In *Optimal Control Applied to Biological Models*. <https://doi.org/10.1201/9781420011418>
- Mahardika, D., & Kartika, S. (2024). Dynamic System of Tuberculosis Model Using Optimal Control in Semarang City Indonesia. *Barekeng*, 18(1), 0043–0052. <https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss1pp0029-0042>
- Muniroh, M. A. (2025). Simulation Modeling Incomplete Treatment Impact on Tuberculosis Transmission. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 21(2), 456–466. <https://doi.org/10.20956/j.v21i2.36825>
- Nafisah, Z., & Adi, Y. A. (2024). Model SEIR Dengan Pseudo-Recovery Pada Kasus Tuberkulosis Di Jawa Barat. *Jurnal Matematika UNAND*, 13(3), 170–187. <https://doi.org/https://doi.org/10.25077/jmua.13.3.170-187.2024>
- Nisa, S., & Syata, I. (2024). Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 Model Penyebaran Demam Berdarah Dengue Di Kota Makassar. *Al-Aqlu: Jurnal Matematika, Teknik Dan Sains*, 2(1), 52–61. <https://doi.org/https://doi.org/10.59896/aqlu.v2i1.52>
- Nugroho, A. A., Aziz, M. A., & Tanjung, A. Y. A. (2023). Analisis dan Simulasi Parameter Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) pada Penyebaran Tuberkulosis di Indonesia. *JURNAL INTEGRASI SAINS DAN QUR'AN (JISQu)*, 2(1), 114–120. <https://doi.org/https://doi.org/10.64477/jisqu.v2i1.52>
- Ochieng, F. O. (2025). Mathematical Modeling of Tuberculosis Transmission Dynamics With Reinfection and Optimal Control. *Engineering Reports*, 7(1). <https://doi.org/10.1002/eng.213068>
- Peter, O. J., Abidemi, A., Fatmawati, F., Ojo, M. M., & Oguntolu, F. A. (2024). Optimizing tuberculosis control: a comprehensive simulation of integrated interventions using a mathematical model. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 4(3), 238–255. <https://doi.org/10.53391/mmnsa.1461011>
- Putri, I. D. M., & Abadi, A. (2024). MODEL PENYEBARAN TUBERCULOSIS DENGAN PENGURANGAN WAKTU KONTAK DAN VAKSINASI. *Math Unesa Jurnal Ilmiah Matematika*, 12(02), 311–321.
- Safira Putri Islamiati, Eti Dwi Wiraningsih, & Devi Eka Wardani Meganingtyas. (2023). Model Matematika Co-infection Tuberkulosis dan COVID-19 dengan Intervensi Obat Anti Tuberkulosis (OAT). *JMT: Jurnal Matematika Dan Terapan*, 5(1), 33–42. <https://doi.org/10.21009/jmt.5.1.4>
- Sari, F. Y., Maulidy, R., Wahyudi, N., Fransisca, V., & Putri, A. M. (2024). Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis Di Provinsi Jawa Timur. *Journal of*

*Mathematics Education and Science*, 7(2), 117–128.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.32665/james.v7i2.2733>

Sukarsih, I., Gunawan, G., Gifty, H., & ... (2023). Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Mempertimbangkan Faktor Gizi. *Seminar Nasional Teknologi Informasi Dan Matematika*, 2(1), 112–120.  
<https://journal.itk.ac.id/index.php/semiotika/article/download/1007/531>

Sulistiyowati, A., & Abadi, A. (2023). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Tuberkulosis Dengan Mdr-Tb Dan Pengaruh Vaksinasi. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(2), 156–163. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n2.p156-163>