

## Pelabelan dengan Syarat Jarak Dua pada Graf Peach dan Graf Cricket

Hafif Komarullah\*

Tadris Matematika, Fakultas Tarbiyah, Universitas Al Falah As Sunniyyah, Jember, Indonesia  
Email Corresponding Author : [hafififa4@gmail.com](mailto:hafififa4@gmail.com)

### Info Artikel

#### Article history:

Kirim: 07/09/2025  
Perbaikan: 20/05/2026  
Terima: 26/05/2026  
Publikasi: 17/06/2026

#### Kata-kata kunci:

Pelabelan  $L(2,1)$   
Nilai Minimum  $Span$   
Graf Peach  
Graf Cricket.

### ABSTRAK

Misalkan  $G$  adalah graf terhubung sederhana. Pelabelan  $L(2,1)$  pada graf  $G$  didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan setiap titik pada graf  $G$  ke himpunan bilangan 0 hingga  $k$ , dengan ketentuan bahwa dua titik yang bertetangga (berjarak satu) harus memiliki selisih label minimal dua, sedangkan dua titik yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu. Nilai  $k$  merupakan label maksimum dari pelabelan  $L(2,1)$  yang disebut  $span$ . Nilai minimum  $span$  dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\lambda_{2,1}(G)$ . Penelitian ini bertujuan menentukan nilai minimum  $span$  dari graf *peach* ( $C_n^m$ ) dan graf *cricket* ( $Cr_{n,m}$ ). Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Berdasarkan hasil analisis, peneliti mendapatkan bahwa  $\lambda_{2,1}(C_n^m) = m + 3$  dan  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) = 5$ . Penelitian ini dapat memperkaya referensi terkait pelabelan  $L(2,1)$  dan peneliti lain dapat melanjutkan penelitian serupa pada kelas graf lainnya atau mengaplikasikan pelabelan  $L(2,1)$  pada permasalahan sehari-hari.

## 1. PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu bagian esensial dalam matematika diskrit yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan nyata, terutama dalam bidang ilmu komputer (Durga Prasad et al., 2017), telekomunikasi (Kostić et al., 2020), rekayasa jaringan (Chen, 1997), penentuan jalur terpendek (Nurfadila et al., 2025), dan keamanan pesan (Nandigam & Sundarayya, 2025). Salah satu aspek menarik dalam teori graf adalah masalah pelabelan graf, yaitu pemberian label berupa bilangan bulat pada simpul atau sisi dengan aturan tertentu (Gallian, 2022). Beragam jenis pelabelan telah dikaji oleh para peneliti, di antaranya pelabelan prima (Tout et al., 1982), pelabelan koprime (Berliner et al., 2016), pelabelan harmonis (Graham & Sloane, 1980), dan pelabelan  $L(2,1)$  (Griggs & Yeh, 1992). Setiap jenis pelabelan memiliki aturan dan tantangan yang berbeda serta dapat digunakan untuk memodelkan berbagai persoalan praktis.

**Definisi 1.** (Griggs & Yeh, 1992) Misalkan  $G$  adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Pelabelan  $L(2,1)$  pada graf  $G$  adalah fungsi  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  sedemikian sehingga  $|f(u) - f(v)| \geq 2$  jika  $d(u, v) = 1$  dan  $|f(u) - f(v)| \geq 1$  jika  $d(u, v) = 2$  untuk setiap  $u, v \in V(G)$ . Label terbesar dari pelabelan  $L(2,1)$  dari graf  $G$  disebut  $span(G)$  dan nilai minimum  $span(G)$  dinotasikan dengan  $\lambda_{2,1}(G)$ .

Beberapa peneliti sudah melakukan penelitian tentang pelabelan  $L(2,1)$  pada beberapa kelas graf. Nilai minimum  $span$  pada graf siklus  $C_n$  dan graf lintasan  $P_n$  masing-masing adalah 4. Nilai minimum  $span$  pada graf bintang  $S_n$  dan graf roda  $W_n$  masing-masing adalah  $n + 1$  (Griggs & Yeh, 1992). Graf Sierpinski ( $S_{n,m}$ ) dengan  $m = 2$  dan  $m = 3$  memiliki nilai minimum  $span$  sama dengan 4 (Sagala & Susiana, 2017). Graf Lollipop ( $L_{m,n}$ ) dan graf

pendulum ( $P_n^k$ ) memiliki nilai minimum *span* berturut-turut sebesar  $2m - 1$  dan  $k + 1$  (Umam et al., 2022). Hasil pelabelan  $L(2,1)$  yang lain dapat dilihat pada (Fatimah et al., 2016; Aminulloh & Afif, 2019; Halikin & Komarullah, 2022; Komarullah et al., 2022; Komarullah, 2023; Ningrum & Abrar, 2024; Komarullah et al., 2025a; Komarullah et al., 2025b; Komarullah et al., 2026a; Komarullah et al., 2026b; Komarullah et al., 2026c; Komarullah et al., 2026d).

Meskipun kajian mengenai pelabelan  $L(2,1)$  telah berkembang pada berbagai kelas graf, penelitian yang membahas nilai minimum *span* pada graf hasil modifikasi maupun graf hasil identifikasi titik masih relatif terbatas. Sebagian besar penelitian sebelumnya hanya berfokus pada graf dasar seperti graf lintasan, siklus, roda, dan beberapa graf hasil operasi tertentu. Hingga saat ini, belum ditemukan hasil penelitian yang secara khusus membahas pelabelan  $L(2,1)$  pada graf *peach* dan graf *cricket*. Padahal, kedua graf tersebut memiliki struktur yang unik karena terbentuk dari kombinasi beberapa graf sederhana melalui proses identifikasi titik sehingga berpotensi menghasilkan pola pelabelan yang berbeda. Oleh karena itu, penelitian ini penting dilakukan untuk mengisi kekosongan kajian terkait nilai minimum *span* pada kedua kelas graf tersebut sekaligus memperkaya pengembangan teori pelabelan graf.

Dalam penelitian ini, peneliti akan membahas pelabelan  $L(2,1)$  dan menentukan nilai minimum *span* dari graf *peach* dan graf *cricket*. Graf tersebut dipilih karena masih menjadi masalah terbuka.

**Definisi 2.** (Wijaya & Baskoro, 2015) Identifikasi titik dari graf  $G_1$  dan  $G_2$  pada titik-titik  $u \in V(G_1)$  dan  $v \in V(G_2)$  yang dilambangkan dengan  $(G_1 \odot_{uv} G_2)$  menghasilkan graf  $G$  yang diperoleh dengan melekatkan titik-titik  $u$  dan  $v$ . Dengan demikian, graf  $G$  memiliki  $(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 1)$  titik dan  $(|E(G_1)| + |E(G_2)|)$  sisi.

Penelitian ini diharapkan dapat menambah referensi tentang teori graf pada umumnya dan pelabelan  $L(2,1)$  pada khususnya.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif dengan pendekatan deskriptif aksiomatik. Penelitian dilakukan untuk menentukan nilai minimum *span* dari pelabelan  $L(2,1)$  pada graf *peach* dan graf *cricket* melalui analisis matematis berdasarkan definisi, lemma, dan teorema yang relevan.

Langkah-langkah penelitian dilakukan secara sistematis sebagai berikut.

### a. Studi Literatur

Peneliti mengkaji berbagai referensi yang berkaitan dengan teori graf dan pelabelan  $L(2,1)$ , yang diperoleh melalui jurnal ilmiah nasional maupun internasional, buku teori graf, prosiding seminar, serta hasil penelitian terdahulu yang relevan. Referensi tersebut diperoleh melalui penelusuran pada Google Scholar, portal Garuda, dan beberapa jurnal internasional bereputasi. Adapun referensi utama yang dikaji antara lain penelitian Griggs dan Yeh (1992) tentang pelabelan  $L(2,1)$ , Gallian (2022) tentang survei dinamis pelabelan graf, Fatimah dkk. (2016) mengenai pelabelan  $L(2,1)$  pada operasi beberapa kelas graf, Halikin dan Komarullah (2022) mengenai pelabelan pada *generalized friendship*, *windmill*,

dan graf *torch*, serta Umam dkk. (2022) mengenai pelabelan pada graf lollipop dan graf pendulum. Selain itu, peneliti juga mengkaji beberapa artikel terkait nilai minimum span pada berbagai kelas graf yang tercantum pada daftar referensi penelitian ini. Secara keseluruhan, terdapat lebih dari 20 referensi yang digunakan dalam penelitian ini. Tahap studi literatur dilakukan untuk memahami konsep dasar, metode pembuktian, pola konstruksi pelabelan, serta hasil-hasil penelitian sebelumnya yang relevan sebagai dasar dalam menyusun teorema dan pembuktian.

b. Menentukan Kelas Graf

Penelitian difokuskan pada graf *peach* dan graf *cricket*. Pada tahap ini dilakukan identifikasi karakteristik graf, meliputi himpunan titik, himpunan sisi, order, dan ukuran graf.

c. Penotasian Graf

Peneliti memberikan notasi pada setiap titik dan sisi graf *peach* serta graf *cricket* untuk mempermudah proses konstruksi pelabelan dan pembuktian teorema.

d. Konstruksi Pelabelan  $L(2,1)$

Peneliti melakukan percobaan pelabelan pada beberapa kasus untuk menemukan pola pelabelan yang memenuhi syarat:

- titik yang bertetangga memiliki selisih label minimal dua,
- titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu.

e. Analisis Pola dan Penyusunan Teorema

Pola-pola yang diperoleh dari hasil konstruksi pelabelan dianalisis menggunakan metode pendeteksian pola. Selanjutnya pola tersebut digeneralisasi menjadi bentuk teorema.

f. Pembuktian Teorema

Teorema yang diperoleh dibuktikan secara matematis menggunakan definisi dan lemma yang relevan untuk menunjukkan nilai minimum span pada graf *peach* dan graf *cricket*.

Dalam proses pembuktian digunakan beberapa lemma pendukung sebagai berikut.

**Lemma 1.** (Lum, 2007) Jika  $H$  adalah sebuah subgraf dari  $G$ , maka  $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$ .

**Lemma 2.** (Griggs & Yeh, 1992) Misalkan  $S_{1,n}$  adalah sebuah graf bintang dengan  $n \geq 2$ , maka  $\lambda_{2,1}(S_{1,n}) = n + 1$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Hasil Penelitian

Hasil penelitian pada bagian ini diperoleh berdasarkan tahapan konstruksi pelabelan dan analisis pola yang telah dijelaskan pada metode penelitian. Setiap teorema disusun dari hasil observasi pola pelabelan pada beberapa kasus, kemudian dibuktikan secara matematis untuk memperoleh nilai minimum *span* yang memenuhi syarat pelabelan  $L(2,1)$ .

a. Graf *Peach*

Graf *peach* dengan order dan ukuran sama yaitu  $n + m$  dinotasikan dengan  $C_n^m$  merupakan graf yang isomorfis dengan  $C_n \odot_{u_1 v_0} S_m$  yaitu graf yang diperoleh dengan menempelkan titik pusat graf

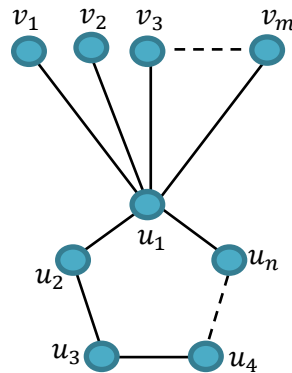
DOI: <https://doi.org/10.63976/jimat.v7i2.1018>

bintang (titik berderajat  $m$ ) dengan salah satu titik pada graf siklus. Himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$  dari graf *peach* dinotasikan sebagai berikut.

$$V(C_n^m) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

$$E(C_n^m) = \{u_1 u_n, u_i u_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{u_1 v_j; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Sebagai contoh, Gambar 1 adalah ilustrasi dari graf *peach* ( $C_n^m$ ).



Gambar 1. Graf *Peach* ( $C_n^m$ )

**Teorema 1.** Untuk setiap  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ ,  $\lambda_{2,1}(C_n^m) = m + 3$ .

**Bukti.** Untuk menunjukkan  $\lambda_{2,1}(C_n^m) = m + 3$ , maka harus ditunjukkan  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \geq m + 3$  dan  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \leq m + 3$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \geq m + 3$ . Pandang bahwa graf bintang  $S_{1,m+2}$  adalah subgraf dari graf *peach*  $C_n^m$ . Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \geq \lambda_{2,1}(S_{1,m+2}) = m + 3$ , sehingga  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \geq m + 3$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \leq m + 3$  yaitu dengan membangun fungsi yang memetakan titik dari graf *peach*  $C_n^m$  ke himpunan bilangan  $\{0, 1, 2, \dots, m + 3\}$ . Kontruksi fungsi tersebut dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.

1. Kasus  $n = 4$

$$f(u_i) = \frac{5}{3}i^3 - \frac{25}{2}i^2 + \frac{173}{6}i - 18 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, 4$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } j = 1, \\ j + 3 & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

2. Kasus  $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j = 1, \\ j + 3 & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

3. Kasus  $n \equiv 1 \pmod{3}$  dan  $n \neq 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n - 2, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n - 1, \\ 3 & \text{untuk } i = n - 2, \\ 1 & \text{untuk } i = n - 1, \\ 4 & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j = 1, \\ j + 3 & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

4. Kasus  $n \equiv 2 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n - 1, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{untuk } i = n - 1, \\ 3 & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = j + 3 \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Berdasarkan fungsi tersebut, setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label mutlak minimal dua, sedangkan titik yang berjarak dua memiliki selisih label mutlak minimal satu. Dengan demikian, terbukti bahwa fungsi  $f$  telah memenuhi ketentuan pelabelan  $L(2,1)$ , sehingga  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \leq m + 3$ . Karena  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \geq m + 3$  dan  $\lambda_{2,1}(C_n^m) \leq m + 3$ , maka  $\lambda_{2,1}(C_n^m) = m + 3$ . ■

b. Graf *Cricket*

Graf *cricket*  $Cr_{n,m}$  memiliki order  $2m + n$  dan ukuran  $2m + n$  merupakan graf yang dibangun dari hasil identifikasi titik graf siklus  $C_n$  dan graf lintasan  $P_{2m+1}$  dengan menempelkan titik tengah graf lintasan dengan salah satu titik pada graf siklus. Titik dan sisi pada graf *cricket*  $Cr_{n,m}$  dinotasikan sebagai berikut.

$$V(Cr_{n,m}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_j; j \in [1, m]\} \cup \{w_j; j \in [1, m]\}$$

$$E(Cr_{n,m}) = \{u_1u_n, u_iu_{i+1}; i \in [1, n - 1]\} \cup \{u_1v_1, u_1w_1\} \cup \{v_jv_{j+1}, w_jw_{j+1}; j \in [1, m - 1]\}$$

Gambar 2 adalah contoh penotasian titik dan sisi pada graf *cricket*  $(Cr_{n,m})$ .

**Teorema 2.** Untuk setiap  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ ,  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) = 5$ .

**Bukti.** Akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \geq 5$  dan  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \leq 5$  untuk membuktikan  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) = 5$ . Langkah pertama yaitu menunjukkan  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \geq 5$ . Pandang bahwa garf bintang  $S_{1,4}$  adalah subgraf dari graf *cricket*  $Cr_{n,m}$ . Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \geq \lambda_{2,1}(S_{1,4}) = 5$ , sehingga  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \geq 5$ . Langkah kedua yaitu menunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \leq 5$  yaitu dengan membangun fungsi yang memetakan titik dari graf *cricket* ke himpunan bilangan  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  yang akan dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.

1. Kasus  $n = 4$

$$f(u_i) = \frac{5}{3}i^3 - \frac{25}{2}i^2 + \frac{173}{6}i - 18 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, 4$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 5 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

$$f(w_j) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 4 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

2. Kasus  $n \equiv 0 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 5 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(w_j) = \begin{cases} 5 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 3 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

3. Kasus  $n \equiv 1 \pmod{3}$  dan  $n \neq 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n-2, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n-1, \\ 3 & \text{untuk } i = n-2, \\ 1 & \text{untuk } i = n-1, \\ 4 & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 5 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(w_j) = \begin{cases} 5 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 3 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

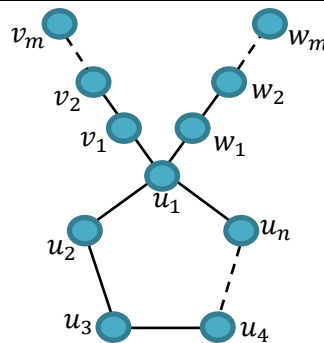
4. Kasus  $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n-1, \\ 2 & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } i \neq n, \\ 4 & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } i = n-1, \\ 3 & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(w_j) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}, \\ 5 & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Secara formal, dapat dinyatakan bahwa setiap pasangan titik yang berjarak satu memiliki selisih label mutlak sekurang-kurangnya dua, sedangkan setiap pasangan titik yang berjarak dua memiliki selisih label mutlak sekurang-kurangnya satu. Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa fungsi  $f$  memenuhi ketentuan pelabelan  $L(2,1)$ , sehingga terbukti  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \leq 5$ . Karena  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \geq 5$  dan  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) \leq 5$ , maka  $\lambda_{2,1}(Cr_{n,m}) = 5$ . ■



Gambar 2. Graf cricket ( $Cr_{n,m}$ )

## Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai minimum span pelabelan  $L(2,1)$  pada graf *peach* ( $C_n^m$ ) dan graf *cricket* ( $Cr_{n,m}$ ) berturut-turut adalah  $m + 3$  dan 5. Nilai tersebut diperoleh melalui konstruksi pelabelan yang memenuhi syarat bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki selisih label minimal dua, sedangkan titik yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu.

Pada graf *peach*, keberadaan subgraf bintang menjadi faktor utama yang memengaruhi nilai minimum *span*. Berdasarkan Lemma 2, graf bintang ( $S_{1,n}$ ) memiliki nilai minimum *span* sebesar  $n + 1$ , sehingga graf *peach* yang memuat graf bintang ( $S_{1,m+2}$ ) tidak mungkin memiliki *span* kurang dari  $m+3$ . Selain itu, struktur graf *peach* yang merupakan hasil identifikasi antara graf siklus dan graf bintang menyebabkan titik pusat memiliki derajat yang relatif tinggi dibanding titik lainnya. Kondisi ini mengakibatkan kebutuhan label yang lebih besar agar syarat pelabelan tetap terpenuhi pada seluruh pasangan titik yang bertetangga maupun berjarak dua. Konstruksi pelabelan yang diperoleh pada graf *peach* menunjukkan adanya pola pengulangan label secara periodik. Pola tersebut memungkinkan penggunaan label secara efisien tanpa melanggar syarat pelabelan. Dengan demikian, *span*  $m + 3$  tidak hanya menjadi batas bawah, tetapi juga dapat direalisasikan melalui konstruksi fungsi pelabelan yang sesuai.

Sementara itu, pada graf *cricket*, struktur graf yang terbentuk dari identifikasi graf siklus dan graf lintasan menghasilkan titik penghubung yang memiliki peranan penting dalam proses pelabelan. Titik tersebut menjadi pusat distribusi label karena terhubung dengan beberapa titik lain yang memiliki jarak berdekatan. Akibatnya, penggunaan label kecil secara berulang menjadi terbatas sehingga diperlukan *span* minimal sebesar 5.

Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa meskipun graf *peach* dan graf *cricket* memiliki konstruksi yang berbeda, keduanya menghasilkan nilai minimum *span* yang sama. Hal tersebut menunjukkan bahwa keberadaan titik dengan derajat tinggi dan pola kedekatan antar titik lebih berpengaruh terhadap nilai *span* dibanding bentuk global graf itu sendiri. Temuan ini sejalan dengan penelitian sebelumnya yang menunjukkan bahwa graf dengan subgraf bintang cenderung memiliki batas bawah *span* yang relatif besar.

Selain memperkaya kajian pelabelan  $L(2,1)$ , penelitian ini memberikan gambaran bahwa teknik identifikasi titik pada dua graf dapat menghasilkan karakteristik pelabelan yang menarik untuk dikaji lebih lanjut. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada

DOI: <https://doi.org/10.63976/jimat.v7i2.1018>

graf hasil operasi lain, seperti amalgamasi, korona, atau *comb product* untuk melihat pengaruh struktur graf terhadap nilai minimum *span*. Penelitian lanjutan juga dapat mengembangkan algoritma konstruksi pelabelan otomatis pada graf hasil operasi yang lebih kompleks.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan bahwa nilai minimum *span* dari graf *peach* ( $C_n^m$ ) dengan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$  adalah  $m + 3$ . Untuk setiap  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ , nilai minimum *span* dari graf *cricket* ( $Cr_{n,m}$ ) sama dengan 5. Peneliti lain dapat melanjutkan penelitian terkait pelabelan  $L(2, 1)$  pada kelas graf sederhana yang lainnya ataupun kelas graf hasil operasi. Selain itu, peneliti menyarankan agar peneliti lain dapat mengaplikasikan pelabelan  $L(2, 1)$  dalam kehidupan nyata misalnya dalam proses penyandian pesan atau permasalahan lainnya.

#### REFERENSI

- Aminulloh, M. R. A (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$*  (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Berliner, A. H., Dean, N., Hook, J., Marr, A., Mbirika, A., & McBee, C. D. (2016). Coprime and Prime Labellings of Graphs. *Journal of Integer Sequence*. 19(2): 1-14. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698>
- Chen, W. K. (1997). *Graph theory and its engineering applications*. Hongkong: World Scientific Publishing Company.
- DurgaPrasad, D., Muttipati, A. S., Snehadivya, M., & Kavitha, S. (2017). Applications of computer science based on graph theory. *International Journal of Engineering, Science and Mathematics*, 6(8), 1116-1117. [https://www.ijesm.co.in/uploads/68/4349\\_pdf.pdf](https://www.ijesm.co.in/uploads/68/4349_pdf.pdf)
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4-623. Article DS6. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Graham, R. L., & Sloane, N. J. A. (1980). On additive bases and harmonious graphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(4), 382-404. <https://doi.org/10.1137/0601045>
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H., Fauzan, A., & Rosi, A. (2026a). Nilai minimal span pelabelan jarak dua pada graf bintang siklus. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 3(1), 871-877.

DOI: <https://doi.org/10.63976/jimat.v7i2.1018>

- Komarullah, H., Im, F. A. J., & Maulidi, Z. J. K. (2025a). Nilai minimum span pelabelan berbasis jarak pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 2(2), 917–922.
- Komarullah, H., Nurfadila, R. A., & Rosyidah, S. Z. (2026b). Pelabelan jarak dua pada beberapa kelas graf. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 3(1), 843–849.
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Im, F. A. J. (2026c). Pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf bunga double quadrilateral dan graf kincir angin double quadrilateral. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 3(1), 758–763.
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025b). Span terkecil dari pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf dumbbell. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 2(2), 956–963.
- Komarullah, H., Utami, D. M., & Masrurroh, S. (2026d). Pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf kerucut, graf timbangan, dan graf buku segitiga pendant. *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"*, 3(1), 864–870.
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Kostić, S. M., Simić, M. I., & Kostić, M. V. (2020). Social network analysis and churn prediction in telecommunications using graph theory. *Entropy*, 22(7), 753. <https://doi.org/10.3390/e22070753>
- Lum, A. (2007). Upper Bound on  $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree  $\Delta$ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Nandigam, S., & Sundarayya, P. (2025). Graph theory for data cryptography security. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 30(2), 167-184. <https://doi.org/10.1504/IJMOR.2025.145641>
- Ningrum, L. D., & Abrar, A. M. (2024). The  $L(2, 1)$ -Labeling of Mongolian Tent, Lobster, Triangular Snake, and Kayak Paddle Graph. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 7(1), 45-58. <https://doi.org/10.14710/jfma.v6i2.18228>
- Nurfadila, R. A., Saputri, M. D., & Komarullah, H. (2025). Pencarian Jalur Evakuasi Terdekat Siaga Tsunami Pantai Selatan Jember Menggunakan Algoritma Dijkstra. *AS-SUNNIYYAH*, 4(02), 102-108. <https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v4i02.2137>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan  $L(2,1)$  pada Graf Sierpinski  $S(n,k)$ . *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *National Academy Science Letters-India*, 5(11), 365-368.

DOI: <https://doi.org/10.63976/jimat.v7i2.1018>

---

- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022). L(2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>
- Wijaya, K., & Baskoro, E. T. (2016). On Ramsey  $(2K_2, 2H)(2K_2, 2H)$ -Minimal Graphs. In *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences: ICMBA, Aligarh, India, June 2015* (pp. 219-225). Springer India.